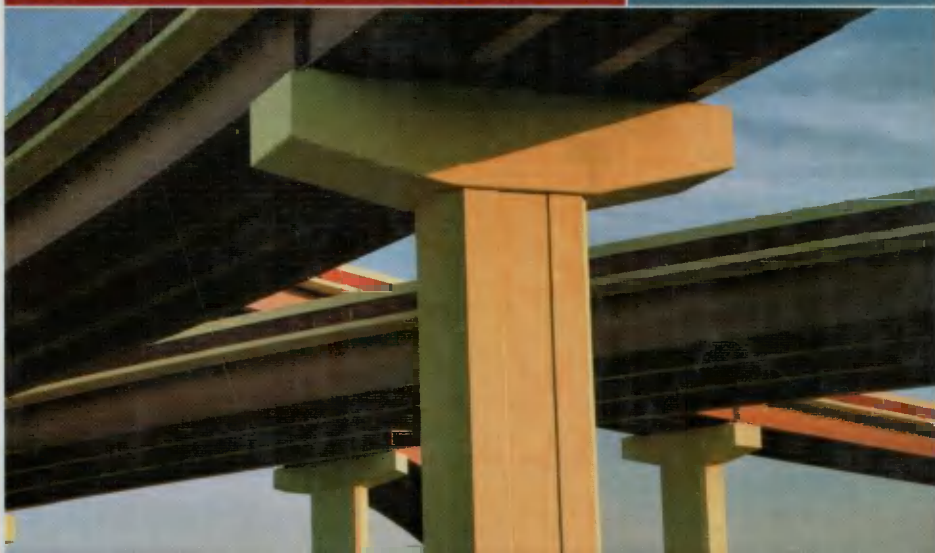


А. А. Эрдеди
Н. А. Эрдеди

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

8-е издание

ОБЩЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ
ДИСЦИПЛИНЫ



А. А. ЭРДЕДИ, Н. А. ЭРДЕДИ

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ**

121987

*Допущено
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений среднего профессионального образования,
обучающихся по машиностроительным специальностям*

8-е издание, стереотипное



Москва
Издательский центр «Академия»
2007

УДК 621.01

ББК 30.12

Э75

Рецензент —

преподаватель Государственного образовательного учреждения
«Мытищинский машиностроительный техникум-предприятие» В. К. Житков

Эрдеди А.А.

Э75

Теоретическая механика. Сопротивление материалов : учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования / А.А.Эрдеди, Н.А.Эрдеди. — 8-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2007. — 320 с.

ISBN 978-5-7695-4494-1

В учебном пособии изложены основы теоретической механики и сопротивления материалов с применением элементов высшей математики, а также даны элементарные сведения из теории машин и механизмов.

Для студентов машиностроительных специальностей средних профессиональных учебных заведений.

УДК 621.01

ББК 30.12

Учебное издание

Эрдеди Алексей Алексеевич,

Эрдеди Наталия Алексеевна

Теоретическая механика. Сопротивление материалов

Учебное пособие

8-е издание, стереотипное

Редактор *Л.Ю.Кнопов*

Технический редактор *О.С.Александрова*

Компьютерная верстка: *В.Н.Канивец*

Корректоры *С.Ю.Свиридова, Е.В.Соловьева*

Изд. № 108101838. Подписано в печать 27.07.2007. Формат 60×90/16.
Гарнитура «Таймс». Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,0.
Тираж 1 500 экз. Заказ № 19623.

Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.004796.07.04 от 20.07.2004.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б, к. 360. Тел./факс: (495) 330-1092, 334-8337.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

*Оригинал-макет данного издания является собственностью
Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом
без согласия правообладателя запрещается*

© Эрдеди А. А., Эрдеди Н. А., 2003

© Образовательно-издательский центр «Академия», 2003

ISBN 978- 5-7695-4494-1 © Оформление. Издательский центр «Академия», 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии изложены основы теоретической механики, сопротивления материалов, элементарные сведения из теории механизмов и машин. Изложение ведется с применением высшей математики. Применяется правая система координат и соответствующее ей правило знаков для моментов сил и пар.

В книге рассмотрены все вопросы, предусмотренные программой для машиностроительных специальностей учреждений среднего профессионального образования.

Пособие приведено в соответствие с существующими образовательными стандартами. Буквенные обозначения физических величин соответствуют Международному стандарту и рекомендации ИСО.

В целях усиления практической направленности изложения предметов учебное пособие содержит подразделы: «Некоторые сведения о механизмах» и «Понятие о промышленных роботах».

Для интенсификации и активизации учебного процесса в книге приведены два приложения: «Домашние расчетно-графические задания. Содержание, оформление и методика проведения» и «Программированные тренировочные карточки для подготовки к контрольным работам».

*Долгопрудненский авиационный техникум
Электронная библиотека*



Козловский Александр Юрьевич



141702 Россия Московская обл.
г. Долгопрудный, пл. Собина, 1

Phone: 8(495)4084593 8(495)4083109
Email: dat_je@mail.ru
Site: gosdat.ru

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВВЕДЕНИЕ

Механика — это наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел. *Теоретическая механика* — это раздел механики, в котором изучаются законы движения тел и общие свойства этих движений.

Механическое движение — это изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или частей данного тела. Состояние покоя есть частный случай механического движения, причем понятия покоя и механического движения являются относительными. Так, человек, сидящий в вагоне равномерно и прямолинейно движущегося поезда, может считать себя находящимся в покое по отношению к вагону, но по отношению к Земле он будет находиться в движении.

Другие формы движения материи включают в себе механическое движение, но не могут быть объяснены только законами механики и являются объектом изучения других наук, например химии, биологии и т. д.

Механика — одна из самых древних наук. Термин «механика» введен выдающимся философом древности Аристотелем (384–322 до н.э.). Первые научные основы учения о равновесии тел содержатся в трудах Архимеда (287–212 до н.э.). На всех этапах своего развития механика была тесно связана с развитием производительных сил общества и способствовала техническому прогрессу.

В развитие механики значительный вклад внесли многие отечественные ученые, в том числе «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский (1847–1921), автор известного в свое время учебника по теоретической механике; И. В. Мещерский (1859–1935), заложивший основы механики тел переменной массы, его задачник по теоретической механике переиздается и в наши дни.

Благодаря трудам ученых-механиков стали возможными запуск первого искусственного спутника Земли, фотографирование обратной стороны Луны, первые полеты человека в космическое пространство и высадка людей на поверхность Луны, которую осуществили американские астронавты. Следует отметить замечательного русского ученого и изобретателя К. Э. Циолковского (1857–1935), заложившего основы теории реактивного движения и космических полетов. Мечта людей о покорении космоса стала ре-

альностью в результате деятельности выдающегося ученого, академика С.П. Королева (1906–1966) — генерального конструктора космических кораблей «Восток» и «Восход». Первым человеком, полетевшим в космос 12 апреля 1961 г., был наш соотечественник Ю.А. Гагарин (1934–1968).

Достижения ученых в области механики дают возможность решать сложные практические проблемы и способствуют развитию фундаментальных наук, к числу которых относится механика.

По словам известного ученого-механика академика А.Ю. Ишлинского, механика имеет отношение ко всем явлениям природы и творениям техники, ко всем естественным научным дисциплинам. По существу, ни одно явление природы не может быть в должной мере понято без уяснения его механической стороны, и ни одно творение техники нельзя создать, не принимая в расчет те или иные механические закономерности. В этом, разумеется, нет ничего удивительного, так как любое явление в окружающем нас макром мире связано с движением, следовательно, не может не иметь того или иного отношения к механике.

В первой части учебного пособия изложены основы теоретической механики, базирующейся на законах Ньютона и называемой классической механикой в отличие от механики теории относительности (релятивистской механики), основанной на теории относительности Эйнштейна, и квантовой механики, которой подчиняется движение тел атомных размеров.

Теоретическая механика состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики.

Раздел первый

СТАТИКА

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

1.1. Основные понятия статики

Статика есть часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии. Равновесием будем считать такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

Тело называют абсолютно твердым (или абсолютно жестким), если расстояние между любыми его точками не меняется при действии на него других тел. Абсолютно твердых тел в природе нет, но во многих случаях изменения формы и размеров (деформации) тел настолько незначительны, что ими можно пренебречь. В теоретической механике полагают, что тела абсолютно твердые, и их физико-механические свойства не учитывают (за исключением вопросов, связанных с трением).

Материальной точкой называется точка, имеющая массу. Материальной точкой мы будем считать не только тело, имеющее очень малые размеры, но и любое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Например, в астрономии звезды рассматривают как материальные точки, так как размеры звезд малы по сравнению с расстояниями между ними. Одно и то же реальное тело в зависимости от постановки задачи может рассматриваться либо как материальная точка, либо как тело, размеры которого необходимо учесть. Всякое тело можно считать взаимосвязанной совокупностью (системой) материальных точек. Абсолютно твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек.

Тело называется свободным, если никакие другие тела не препятствуют его перемещению в любом направлении, в противном случае тело называется несвободным, или связанным. Пример свободного тела — воздушный шар в полете. Большинство окружающих нас тел являются несвободными телами.

Тела в природе различным образом взаимодействуют между собой или с окружающей средой.

Механическое взаимодействие тел, т.е. взаимодействие, влияющее на их состояние покоя или движения (механическое состояние), характеризуется силой.

Сила есть мера механического взаимодействия тел. Сила характеризуется тремя элементами: числовым значением, направлением и точкой приложения. Таким образом, сила — величина векторная. Числовое значение силы называется модулем вектора силы. Направление силы есть направление того движения, которое получила бы покоящаяся свободная материальная точка под действием этой силы. Прямая линия, по которой направлен вектор силы, называется линией действия силы.

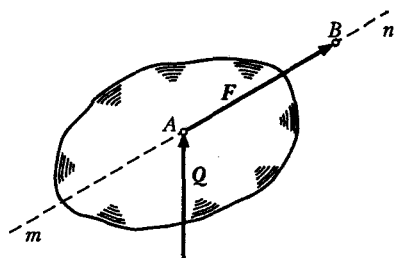


Рис. 1.1

В соответствии с Международной системой единиц (СИ) в качестве единицы силы принят ньюто н (Н).

Ньюто н есть сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.

Кратные и дольные единицы силы образуются путем умножения или деления основной единицы на 10 в некоторой степени. Их названия образуются присоединением десятичных приставок:

мега (М)	10^6	деци (д)	10^{-1}
кило (к)	10^3	сант и (с)	10^{-2}
гекто (г)	10^2	милли (м)	10^{-3}
дека (да)	10^1	микро(мк)	10^{-6}

Например, 1 килоньюто н (кН) = 10^3 Н , 1 меганьюто н (МН) = 10^6 Н , 1 миллиньюто н (мН) = 10^{-3} Н .

Графически силу изображают отрезком прямой со стрелкой; длина отрезка в определенном масштабе равна модулю вектора силы (рис. 1.1). Мас ш т а б с и л ы показывает, сколько единиц модуля силы содержится в единице длины ее вектора. Единица масштаба силы, например, $[\mu_F] = \text{Н/мм}$ или Н/см .

На рис. 1.1 изображена сила, приложенная в точке А и действующая по линии *mn*. Вектор силы обозначим прописной латинской жирной буквой *F*, а модуль силы — той же буквой, но светлой *F**. Для вектора силы *F* точка А будет называться началом, а точка В — концом вектора. Нередко удобно изображать вектор силы так,

* В некоторых книгах векторы обозначают светлыми латинскими буквами со стрелочкой (или черточкой) над ними, а модули — той же буквой без стрелочки. Этот способ удобно применять при написании векторных равенств на доске или в тетради.

чтобы стрелка, стоящая в конце вектора, упиралась в точку приложения силы (сила Q на рис. 1.1).

Совокупность тел (в том числе материальных точек), каким-то образом связанных между собой, назовем *системой тел*. Силы взаимодействия между телами, входящими в данную систему, называют *внутренними*, а силы, с которыми действуют на данную систему другие тела, — *внешними*. Если данную систему рассечь на части и рассматривать равновесие каждой части в отдельности, то внутренние для всей системы силы, действующие в сечениях, станут внешними силами для соответствующих частей системы. Такой метод позволяет определить внутренние силы, действующие в сечениях, и называется методом сечений. В теоретической механике он применяется весьма широко. Следует заметить, что деление сил на внешние и внутренние условно и зависит от постановки задачи и даже метода ее решения.

1.2. Основные аксиомы статики

Условия, при которых тело может находиться в равновесии, выводятся из нескольких основных положений, принимаемых без доказательств, но подтвержденных опытом и называемых *аксиомами статики*. Основные аксиомы статики сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1642–1727) и поэтому названы его именем.

Аксиома I (аксиома инерции, или первый закон Ньютона).

Всякое тело сохраняет свое состояние покоя или прямолинейного равномерного движения, пока какие-нибудь силы не выведут тело из этого состояния.

Способность материального тела сохранять движение при отсутствии действующих сил или постепенно изменять это движение, когда на тело начинают действовать силы, называется *инерцией*, или *инертностью*. Инертность есть одно из основных свойств материи.

На основании этой аксиомы состоянием равновесия считаем такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, т.е. по инерции.

Аксиома II (аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона).

Силы взаимодействия между собой двух тел всегда равны по модулю и направлены по соединяющей их прямой в противоположные стороны.

Из третьего закона Ньютона вытекает, что одностороннего механического действия одного тела на другое не существует, т.е. все силы природы — силы парные.

Совокупность сил, приложенных к данному телу (или системе тел), называется *системой сил*. Сила действия какого-либо тела на данное и сила противодействия не представляют собой систему сил, так как они приложены к различным телам.

Если какая-нибудь система сил обладает таким свойством, что после приложения к свободному телу она не изменяет его механическое состояние, то такая система сил называется *уравновешенной*.

Аксиома III (условие равновесия двух сил).

Для равновесия свободного твердого тела, находящегося под действием двух сил, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и действовали по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является *необходимым* для равновесия двух сил. Это значит, что если система двух сил находится в равновесии, то эти силы должны быть равны по модулю и действовать по одной прямой в противоположные стороны.

Условие, сформулированное в этой аксиоме, является *достаточным* для равновесия двух сил. Это значит, что справедлива обратная формулировка аксиомы, а именно: если две силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны, то такая система сил обязательно находится в равновесии.

В дальнейшем мы познакомимся с условием равновесия, которое будет необходимо, но не достаточно для равновесия.

Аксиома IV.

Равновесие (как и любое другое механическое состояние) твердого тела не нарушится, если к нему приложить или от него удалить систему уравновешенных сил.

Следствие из аксиом III и IV.

Механическое состояние твердого тела не нарушится от перенесения силы вдоль линии ее действия.

Докажем это следствие. Пусть на твердое тело действует в числе других сила P , приложенная в точке A , с линией действия ab (рис. 1.2). В произвольно взятой на линии ab точке B приложим две равные по модулю и противоположно направленные силы P_1 и P_2 , действующие по линии ab . Согласно аксиоме III, силы P_1 и P_2 взаимно уравновешены, а на основании аксиомы IV их можно приложить к телу, не нарушая механического состояния. Подберем силы P_1 и P_2 такими, чтобы они по модулю были равны силе P :

$$P_1 = P_2 = P.$$

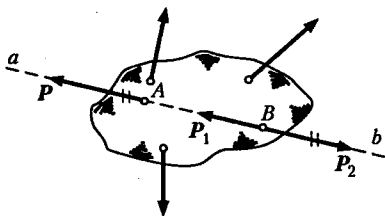


Рис. 1.2

На основании аксиомы IV отбросим силы P и P_2 как взаимно уравновешенные. Тогда оставшуюся силу P_1 можно рассматривать как силу P , перенесенную из точки A в точку B по линии действия, причем механическое состояние не нарушается. Следствие доказано.

Подчеркнем, что перенос силы вдоль линии ее действия можно осуществлять лишь в том случае, если рассматриваемое тело абсолютно твердое.

Две различные системы сил принято считать эквивалентными, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Следует заметить, что эквивалентные системы сил могут вызывать различные деформации нетвердого тела.

На рис. 1.3 изображены две системы сил, порознь действующие на один и тот же стержень AB , причем $P_1 = P_2$, а $Q_1 = Q_2$. На основании аксиомы III ясно, что каждая из этих систем не выводит стержень из равновесия, т.е. они эквивалентны. Но система сил (P_1, P_2) стремится укоротить стержень, а система сил (Q_1, Q_2) — удлинить его. Эквивалентность систем сил условимся записывать так:

$$(P_1, P_2) \equiv (Q_1, Q_2).$$

На основании следствия из аксиом III и IV можно сказать, что *две силы эквивалентны*, если они равны по модулю и действуют по одной прямой в одну сторону. Два вектора силы (как и два любых однородных по размерности вектора) равны, если они параллельны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*, а силы этой системы — *составляющими* этой равнодействующей.

Сила, которая уравновешивает данную систему сил, называется *уравновешивающей* этой системы.

Равнодействующая и уравновешивающая силы одной и той же системы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Равнодействующая уравновешенной системы сил равна нулю, иначе говоря, *уравновешенная система сил эквивалентна нулю*.

Аксиома V (аксиома параллелограмма).

Равнодействующая двух сил, приложенных к телу в одной точке, равна по модулю и совпадает по направлению с диагональю параллелограмма, построенного на данных силах, и приложена в той же точке.

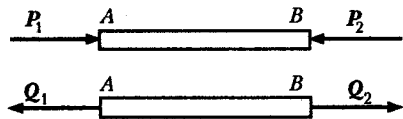


Рис. 1.3

Построение диагонали параллелограмма (рис. 1.4, а), сторонами которого являются заданные

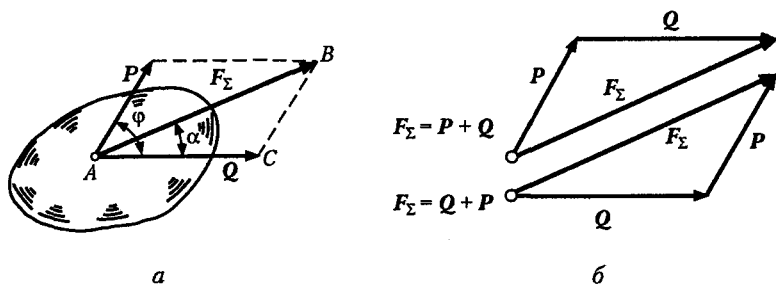


Рис. 1.4

векторы, называется векторным или геометрическим сложением. Таким образом, можно сказать, что *равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, равна их векторной сумме:*

$$F_{\Sigma} = P + Q$$

и приложена в той же точке.

Равнодействующую двух сил можно найти, построив вместо параллелограмма сил *треугольник сил* (рис. 1.4, б). Из рис. 1.4, б видно, что порядок сложения векторов на величину равнодействующей не влияет, т. е.

$$F_{\Sigma} = P + Q = Q + P.$$

Модуль и направление равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке, можно определить аналитически, для чего рассмотрим треугольник ABC (см. рис. 1.4, а).

По теореме косинусов

$$F_{\Sigma}^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(\pi - \varphi) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi,$$

откуда модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \varphi}.$$

По теореме синусов

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{F_{\Sigma}}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{F_{\Sigma}}{\sin \varphi},$$

откуда найдем направление равнодействующей:

$$\sin \alpha = \frac{P \sin \varphi}{F_{\Sigma}}.$$

Рассмотрим частные случаи сложения двух сил:

1) $\varphi = 0$, тогда $F_{\Sigma} = P + Q$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в одну сторону, равна их сумме и направлена по той же прямой в ту же сторону;

2) $\varphi = 180^\circ$, тогда $F_{\Sigma} = P - Q$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих по одной прямой в разные стороны, равна разности этих сил и направлена по той же прямой в сторону большей силы;

3) $\varphi = 90^\circ$, тогда $F_{\Sigma} = \sqrt{P^2 + Q^2}$,

т.е. равнодействующая двух сил, действующих под прямым углом, равна по величине диагонали прямоугольника, построенного на данных силах.

1.3. Теорема о равновесии плоской системы трех непараллельных сил

Теорема. Для равновесия плоской системы трех непараллельных сил необходимо, но недостаточно, чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.

Пусть даны силы P , Q и F , причем линии действия сил P и Q пересекаются в точке A (рис. 1.5). На основании следствия из аксиом III и IV перенесем силы P и Q вдоль линий их действия в точку A и на основании аксиомы параллелограмма найдем равнодействующую F_{Σ} этих сил.

В результате получим систему двух сил (F_{Σ}, F) , эквивалентную данным трем силам:

$$(P, Q, F) \equiv (F_{\Sigma}, F).$$

Но, согласно аксиоме III, равновесие возможно, если силы F_{Σ} и F лежат на одной прямой, следовательно, линия действия силы F также пройдет через точку A .

Данная теорема дает лишь необходимое условие равновесия, но недостаточное, так как три силы могут сходиться в одной точке, но не быть в равновесии.

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называют *сходящимися*.

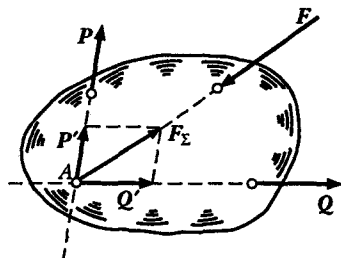


Рис. 1.5

1.4. Разложение силы на две составляющие

Разложить силу на составляющие — это значит *найти систему сил, эквивалентную данной силе*. В общем случае задача разложения силы на две составляющие — задача неопределенная, имеющая бесчисленное множество решений. Для того чтобы задача имела определенное решение, необходимо задать два условия, например направления или модули двух составляющих и т.п. Возможны четыре варианта разложения силы F_{Σ} на две составляющие P и Q , приложенные в той же точке. Во всех случаях решение сводится к построению параллелограмма сил.

1. Даны направления двух составляющих P и Q .

Решение показано на рис. 1.6.

2. Даны модуль и направление одной составляющей Q (рис. 1.7, а).

Решение показано на рис. 1.7, б.

3. Даны модули двух составляющих P и Q (рис. 1.8, а).

Задача решается методом засечек (рис. 1.8, б).

Задача имеет два решения, если $P + Q > F_{\Sigma}$ и $P - Q < F_{\Sigma}$.

Задача не имеет решений, если $P + Q < F_{\Sigma}$ и $P - Q > F_{\Sigma}$.

Задача имеет одно решение, если $P + Q = F_{\Sigma}$ и $P - Q = F_{\Sigma}$.

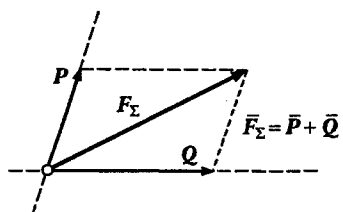


Рис. 1.6

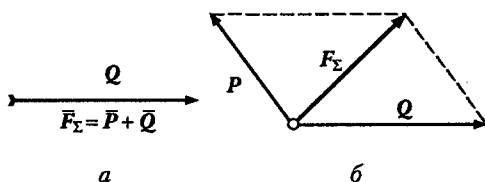
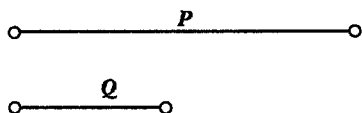
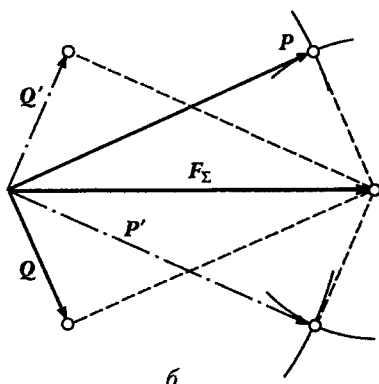


Рис. 1.7



$$F_{\Sigma} = P + Q = P' + Q'$$

а



б

Рис. 1.8

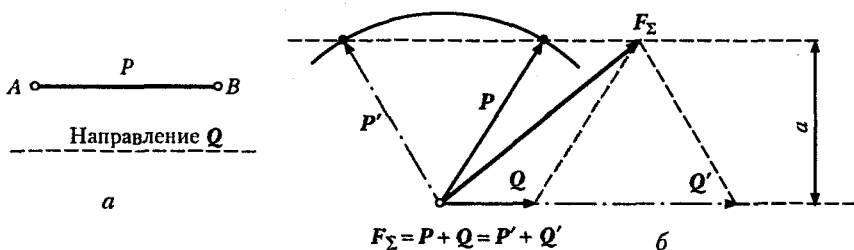


Рис. 1.9

4. Даны направление составляющей Q и модуль второй составляющей P (рис. 1.9, а).

Задача решается методом засечек (рис. 1.9, б).

Задача имеет одно решение, если $a = AB$ (в этом случае угол между векторами P и Q равен 90°).

Задача имеет два решения, если $a < AB$.

Задача не имеет решений, если $a > AB$.

Из рис. 1.9 видно, что модуль составляющей зависит от направления второй составляющей.

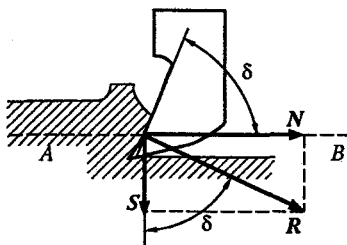


Рис. 1.10

Пример 1.1. Сила давления стружки по направлению, перпендикулярному передней грани резца, равна R . Угол резания резца (угол между передней гранью и направлением движения обрабатываемой детали) равен δ . Определить силу N сопротивления резанию, направленную по линии AB , и перпендикулярную ей силу S , прижимающую резец к обрабатываемой поверхности (рис 1.10). Силой трения пренебречь.

Решение. Разложим заданную силу R на две составляющие N и S по заданным направлениям. Из прямоугольного треугольника получим

$$N = R \sin \delta; S = R \cos \delta.$$

1.5. Связи и реакции связей. Принцип освобожденности

Связями называют ограничения, налагаемые на положения и скорости точек тела в пространстве. Сила, с которой тело действует на связь, называется **силой давления**; сила, с которой связь действует на тело, называется **силой реакции** или просто **реакцией**. Согласно аксиоме взаимодействия, эти силы по модулю равны и действуют по одной прямой в противоположные стороны. Силы реакций и давлений приложены к различным телам и поэтому не представляют собой систему сил.

Силы, действующие на тело, делятся на активные и реактивные. Активные силы стремятся перемещать тело, к которому они приложены, а реактивные препятствуют этому перемещению. Принципиальное отличие активных сил от реактивных заключается в том, что значение реактивных сил, вообще говоря, зависит от значения активных сил, но не наоборот. Активные силы часто называют нагрузками.

При решении большинства задач статики несвободное тело условно изображают как свободное с помощью так называемого принципа освобожденности, который формулируется следующим образом: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их реакциями.*

В результате применения этого принципа получаем тело, свободное от связей и находящееся под действием некоторой системы активных и реактивных сил.

Направление реакций определяется тем, в каком направлении данная связь препятствует перемещению тела. Правило для определения направления реакций можно сформулировать так: *направление реакции связи противоположно направлению перемещения, не допускаемого данной связью.*

Если связи считать идеально гладкими, то во многих случаях можно сразу указать направление их реакций. Рассмотрим направление реакций основных видов связей, встречающихся в различных конструкциях.

1. Идеально гладкая плоскость (рис. 1.11). В этом случае реакция R направлена перпендикулярно опорной плоскости в сторону тела, так как такая связь не дает телу перемещаться только в сторону опорной плоскости, т.е. перпендикулярно ей.

Если тело находится на наклонной плоскости, то, разложив силу тяжести G на две составляющие G_1 и G_2 , параллельную и перпендикулярную опорной плоскости, можно видеть, что составляющая G_1 будет перемещать тело вдоль плоскости, а составляющая G_2 будет прижимать тело к плоскости и уравниваться реакцией R .

2. Идеально гладкая поверхность (рис. 1.12). В этом случае реакция R направлена перпендикулярно касательной плос-

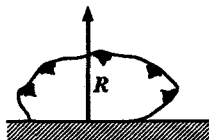


Рис. 1.11

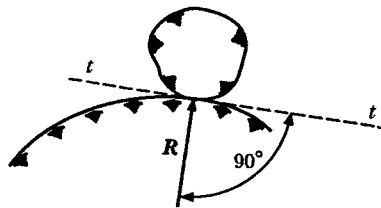
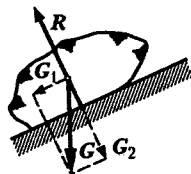


Рис. 1.12

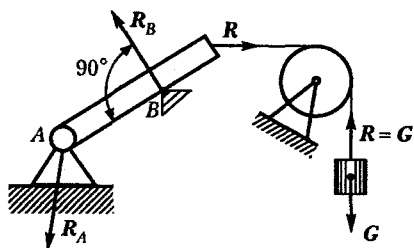


Рис. 1.13

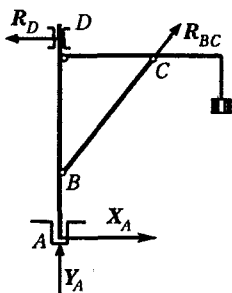


Рис. 1.14

кости $t-t$, т.е. по нормали к опорной поверхности в сторону тела, так как нормаль есть единственное направление перемещения тела, которое не допускает данная связь.

3. Закрепленная точка или ребро угла (рис. 1.13, ребро B). В этом случае реакция R_B направлена по нормали к поверхности идеально гладкого тела в сторону тела, так как нормаль к поверхности тела есть единственное направление перемещения, которое не допускают эти связи.

4. Гибкая связь (см. рис. 1.13). Реакция R гибкой связи не дает телу лишь удаляться от точки подвеса и поэтому направлена вдоль связи от тела к точке подвеса. Из рис. 1.13 видно, что гибкая связь, перекинутая через блок, изменяет направление передаваемого усилия (натяжения нити).

В конструкциях широкое распространение имеют связи, которые называют шарнирами. Шарнир представляет собой подвижное еоединение двух тел, допускающее только вращение вокруг общей оси (цилиндрический шарнир) или общей точки (шаровой шарнир).

5. Идеально гладкий цилиндрический шарнир (см. рис. 1.13, шарнир A ; рис. 1.14, подшипник D). В этом случае заранее известно только, что реакция R_A проходит через ось шарнира и перпендикулярна этой оси, так как шарнирное соединение допускает вращение вокруг оси, но не допускает любое перемещение тела, перпендикулярное этой оси.

6. Идеально гладкий шаровой шарнир. В этом случае заранее известно только, что реакция проходит через центр шарнира, так как тело, закрепленное в шаровом шарнире, может поворачиваться в любом направлении, но не может совершать никаких линейных перемещений в пространстве.

7. Идеально гладкий подпятник (см. рис. 1.14, подпятник A). Подпятник можно рассматривать как сочетание цилиндрического шарнира и опорной плоскости, поэтому будем считать реакцию подпятника состоящей из двух составляющих:

X_A и Y_A . Полная реакция R_A подпятника равна векторной сумме этих составляющих:

$$R_A = X_A + Y_A.$$

8. Стержень, закрепленный двумя концами в идеально гладких шарнирах и нагруженный только по концам (рис. 1.14, стержень BC). В этом случае реакция стержня, согласно аксиоме III, может быть направлена только по линии BC , т.е. по прямой, соединяющей оси шарниров.

В дальнейшем мы нередко будем встречаться с элементами различных конструкций, называемыми брусами. Брусом принято считать твердое тело, у которого длина значительно больше поперечных размеров; множество (геометрическое место) центров тяжести всех поперечных сечений называется осью бруса. Брус с прямолинейной осью, положенный на опоры и изгибаемый приложенными к нему нагрузками, называют балкой.

Пример 1.2. Определить направление реакций опор балки AB , шарнирно закрепленной на неподвижной опоре A и опоре B , положенной накатки; указать направление силы давления балки на опору A (рис. 1.15). Силой тяжести балки пренебречь.

Решение. Применив принцип освобождаемости, отбросим связи балки, т.е. опоры A и B , и заменим их реакциями R_A и R_B . Реакция R_B подвижного шарнира перпендикулярна опорной плоскости, так как это единственное направление перемещения, не допускаемое данной связью. Реакция R_A неподвижного шарнира проходит через ось, и согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил линия действия этой реакции должна проходить через точку M . Реакция R_A будет направлена по линии AM вправо и вверх, так как если опору A мысленно отбросить, то без реакции конец A балки будет под действием силы F перемещаться влево и вниз.

Согласно третьему закону Ньютона, сила давления R'_A будет направлена по линии AM , но в противоположную сторону.

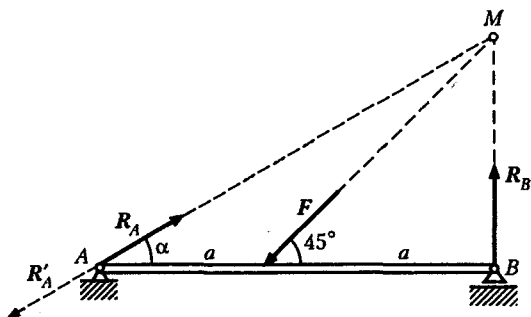


Рис. 1.15

Определим угол α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{a}{2a} = 0,5,$$

отсюда

$$\alpha = 26^{\circ}30' = 0,46 \text{ рад.}$$

1.6. Распределенные нагрузки

До сих пор мы имели дело с силами, которые условно считали приложенными в точке (в действительности они приложены к площадке, размерами которой пренебрегают); такие силы называют *сосредоточенными*. В практике часто встречаются силы, приложенные по объему или поверхности тела, например сила тяжести, давление ветра или воды и т.п. Такие силы называют *распределенными*.

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью, обычно обозначаемой q . Интенсивность есть сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного участка. Интенсивность в СИ выражается в ньютонах на метр (Н/м).

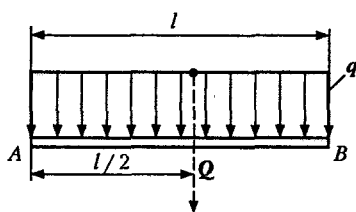


Рис. 1.16

Распределенная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность, называется *равномерно распределенной* (рис. 1.16).

При решении задач статики распределенную нагрузку заменяют ее равнодействующей. Модуль равнодействующей равномерно распределенной нагрузки равен

$$Q = ql.$$

Равнодействующая Q прикладывается в середине отрезка AB .

Распределенная нагрузка, имеющая переменную интенсивность, называется *неравномерно распределенной*. Примером такой нагрузки может служить меняющееся по высоте давление воды на плотину.

Нагрузки, распределенные по поверхности, характеризуются давлением, т.е. силой, приходящейся на единицу площади. В СИ давление выражается в паскалях (Па) или ньютонах на квадратный метр (Н/м²).

1.7. Принцип отвердевания

Принцип отвердевания формулируется так: *механическое состояние нетвердого тела не нарушится, если оно станет абсолютно твердым.*

Приведем примеры, поясняющие данную аксиому. Если жидкость в сосуде находится в равновесии, то оно не нарушится от того, что жидкость замерзнет. Если гибкая нить находится в равновесии под действием двух растягивающих сил, то равновесие не нарушится, если нить станет абсолютно твердой.

Обратная формулировка принципа в общем случае несправедлива. Если твердое тело находится в равновесии, то, превратившись в нетвердое, оно может и не быть в равновесии. Это означает, что условия равновесия твердого тела являются необходимыми, но не достаточными для равновесия нетвердого тела и требуются дополнительные условия, учитывающие те или иные физические свойства тел. Так, например, при растяжении гибкой невесомой нити необходимо обеспечить условия равновесия двух сил, но нужно помнить, что нить может сопротивляться растяжению, но не может сопротивляться сжатию (дополнительное условие равновесия гибкой нити).

Во второй части учебного пособия — «Сопротивление материалов» — мы будем рассматривать равновесие нетвердых, но уже деформированных тел. На основании принципа отвердевания будем принимать эти тела за абсолютно твердые и применять к ним любые законы статики твердого тела.

Глава 2

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

2.1. Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и все пересекаются в одной точке, называется плоской системой сходящихся сил.

Теорема. *Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих.*

Пусть дана плоская система трех сил F_1 , F_2 и F_3 , линии действия которых сходятся в точке A . На основании следствия из аксиом III и IV перенесем эти силы вдоль линий их действия в точку A . Сложив первые две силы F_1 и F_2 по правилу параллелограмма, получим их равнодействующую R (рис. 2.1, а):

$$R = F_1 + F_2.$$

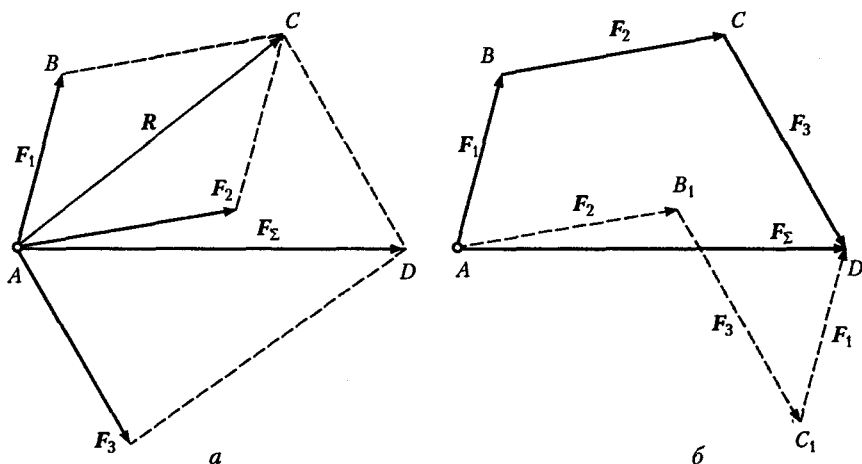


Рис. 2.1

Пользуясь той же аксиомой параллелограмма, сложим равнодействующую R с силой F_3 :

$$F_{\Sigma} = R + F_3 = F_1 + F_2 + F_3,$$

где F_{Σ} — равнодействующая данной системы трех сил.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого количества сходящихся сил, в результате чего получим

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n.$$

Сокращенно это равенство запишем так:

$$F_{\Sigma} = \sum F_i,$$

где i — все целые числа от 1 до n .

Очевидно, что построение, выполненное на рис. 2.1, а, можно заменить более простым (рис. 2.1, б). Многоугольник $ABCD$ называется **силовым многоугольником**. Сторона AD , соединяющая начало первого с концом последнего вектора, называется **замыкающей стороной**.

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника, а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода (см. рис. 2.1, б).

Если определить равнодействующую из силового многоугольника с помощью геометрии и тригонометрии, то такой способ будет называться **геометрическим**.

Если сделать чертеж силового многоугольника в определенном масштабе, то равнодействующая определится простым измерением

замыкающей стороны с последующим умножением на масштаб. Такой способ нахождения равнодействующей называется **г р а ф и - ч е с к и м**.

Порядок сложения векторов при построении силового многоугольника на величину равнодействующей не влияет, так как векторная сумма от перемены мест слагаемых не меняется (см. рис. 2.1, б, многоугольник AB_1C_1D).

2.2. Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил

При построении силового многоугольника возможен случай, когда конец последнего вектора совпадает с началом первого. В этом случае замыкающей стороны не будет, и такой силовой многоугольник называется **з а м к н у т ы м**.

Очевидно, что равнодействующая F_Σ системы сходящихся сил, дающих замкнутый силовой многоугольник, равна нулю, и, следовательно, эта система эквивалентна нулю, т.е. *находится в равновесии*. Отсюда вытекает условие, при котором плоская система сходящихся сил будет находиться в равновесии. Это условие выражается равенством

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \Sigma F_i = 0$$

и формулируется так: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник был замкнут*.

Условия равновесия, записанные в виде равенств, содержащих неизвестные величины, называются **у р а в н е н и я м и р а в н о в е с и я**.

Применяя геометрическое условие равновесия, удобно решать задачи, в которых на тело действуют три силы, так как в этом случае замкнутый силовой многоугольник представляет собой треугольник.

Решение большинства задач статики проводят в три этапа:

- 1) выбирают тело, равновесие которого будет рассматриваться;
- 2) отбрасывают связи, заменяя их реакциями, и устанавливают, какая система сил действует на тело;
- 3) пользуясь условиями равновесия, находят неизвестные величины.

При решении задач технической механики необходимо строго соблюдать правило: *размерности и единицы величин всех слагаемых и обеих частей равенства должны быть одинаковыми*.

В сомнительных случаях целесообразно использовать это правило для проверки правильности хода решения задач, для чего следует подставить в слагаемые проверяемого равенства единицы всех вхо-

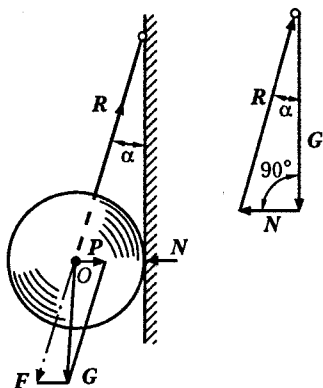


Рис. 2.2

дящих в них величин и, произведя возможные сокращения, сравнить полученные единицы правой и левой частей.

Проверим таким способом приведенную в подразд. 1.6 формулу $Q = ql$:

$$[Q] = [q] \cdot [l], \quad H = (H/m) \cdot m = H.$$

Единицы правой и левой частей равенства одинаковы, следовательно, формула по размерности верна.

Следует заметить, что такая проверка ничего не говорит о правильности нередко входящих в формулы числовых коэффициентов.

Пример 2.1. К вертикальной гладкой стене на веревке, составляющей со стеной угол α , подвешен однородный шар (рис. 2.2). Определить натяжение веревки F и силу давления шара P на стену, если сила тяжести шара G .

Решение. Рассмотрим равновесие шара. Применив принцип освобожденности, отбросим связи и заменим их реакциями. Реакция N гладкой стены перпендикулярна стене и проходит через центр шара. Так как шар однородный, то сила тяжести G приложена в его геометрическом центре. Реакция R направлена вдоль веревки и согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил ее линия действия также должна проходить через центр шара.

К системе трех сходящихся сил, приложенных к шару, применим геометрическое условие равновесия:

$$\sum \vec{F}_i = 0; \quad \vec{G} + \vec{N} + \vec{R} = 0.$$

Строим замкнутый силовой многоугольник, начиная с изображения в произвольном масштабе вектора известной силы G .

Направление обхода треугольника (т.е. направление стрелок) определяется этой силой. Из треугольника получим соотношения:

$$N = G \operatorname{tg} \alpha; \quad R = G / \cos \alpha.$$

Искомая сила давления P шара на стену, согласно аксиоме взаимодействия, по модулю равна реакции N стены, но направлена в противоположную сторону:

$$P = N = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Натяжение F веревки по модулю равно ее реакции R :

$$F = R = G / \cos \alpha.$$

Эту же задачу можно решить, разложив силу тяжести G по реальным направлениям (направлениям реакций) на составляющие P (сила давления шара на стену) и F (натяжение веревки), причем согласно аксиоме взаимодействия $F = R, P = N$.

Из построенного параллелограмма (см. рис. 2.2) легко определяем искомые величины. Такой метод решения задачи называют *методом разложения*.

2.3. Проекция силы на оси координат

В тех случаях, когда на тело действует более трех сил, а также когда неизвестны направления некоторых сил, удобнее при решении задач пользоваться не геометрическим, а аналитическим условием равновесия, которое основано на методе проекций.

Проекцией силы на ось называется отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы.

Пусть даны координатные оси x, y , сила P , приложенная в точке A и расположенная в плоскости координатных осей (рис. 2.3).

Проекциями силы P на оси будут отрезки ab и $a'b'$. Обозначим эти проекции соответственно P_x и P_y . Тогда

$$P_x = P \cos \alpha; \quad P_y = P \sin \alpha.$$

Проекция силы на ось есть величина алгебраическая, которая может быть положительной или отрицательной, что устанавливается по направлению проекции. За *направление проекции* примем направление от проекции начала к проекции конца вектора силы.

Установим следующее правило знаков:

если направление проекции силы на ось совпадает с положительным направлением оси, то эта проекция считается положительной, и наоборот.

Если вектор силы *параллелен* оси, то он проецируется на эту ось в *натуральную величину* (см. рис. 2.3, сила F).

Если вектор силы *перпендикулярен* оси, то его проекция на эту ось *равна нулю* (см. рис. 2.3, сила Q).

Зная две проекции P_x и P_y , из треугольника ABC определяем модуль и направление вектора силы P по следующим формулам:

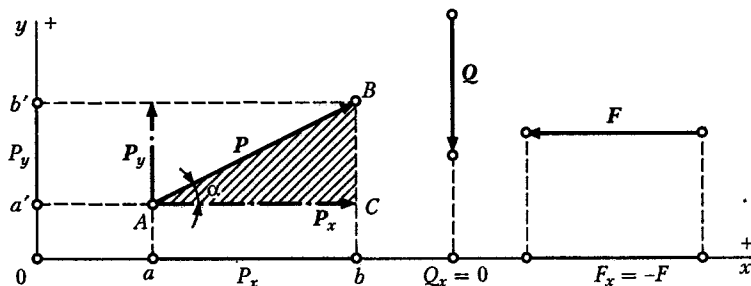


Рис. 2.3

модуль силы

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором силы P и осью x

$$\operatorname{tg} \alpha = P_y / P_x.$$

Отметим, что силу P можно представить как равнодействующую двух составляющих сил P_x и P_y , параллельных осям координат (см. рис. 2.3). Составляющие P_x и P_y и проекции P_x и P_y принципиально отличны друг от друга, так как составляющая есть величина векторная, а проекция — величина алгебраическая; но проекции силы на две взаимно-перпендикулярные оси x и y и модули составляющих той же силы соответственно численно равны, когда сила раскладывается по двум взаимно-перпендикулярным направлениям, параллельным осям x и y .

2.4. Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Пусть дана плоская система n сходящихся сил

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n.$$

Равнодействующая этой системы

$$F_\Sigma = \sum F_i.$$

В плоскости действия данной системы выберем ось координат и спроецируем данные силы и их равнодействующую на эту ось.

Из математики известно свойство проекции векторной суммы, на основании которого можно утверждать, что проекция равнодействующей на ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось, т.е.

$$F_{\Sigma x} = \sum F_{ix}.$$

Правую часть этого равенства записываем упрощенно:

$$F_{\Sigma x} = \sum X.$$

Для того чтобы определить равнодействующую любой плоской системы сходящихся сил, спроецируем их на оси координат x и y , алгебраически сложим проекции всех сил и найдем таким образом проекции равнодействующей:

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y.$$

Зная проекции, определим модуль и направление равнодействующей:

модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2};$$

направляющий тангенс угла между вектором F_{Σ} и осью x

$$\operatorname{tg}(F_{\Sigma}, x) = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma x}.$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

2.5. Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Если данная плоская система сходящихся сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы, а значит, и проекции равнодействующей на оси координат равны нулю:

$$F_{\Sigma} = 0; \quad F_{\Sigma x} = 0; \quad F_{\Sigma y} = 0.$$

Учитывая, что

$$F_{\Sigma x} = \sum X; \quad F_{\Sigma y} = \sum Y,$$

получаем равенства, выражающие аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Формулируются эти условия следующим образом: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей равнялась нулю.*

С помощью уравнений равновесия можно определить два неизвестных элемента данной системы сил, например модуль и направление одной силы или модули двух сил, направления которых известны, и т. п.

Выведенные условия равновесия справедливы для любых осей координат, но для упрощения решения задач рекомендуется оси координат по возможности выбирать перпендикулярными неизвестным силам, чтобы каждое уравнение равновесия содержало одно неизвестное.

Когда направление искомой силы неизвестно, ее можно разложить на две составляющие по заданным направлениям, обычно по

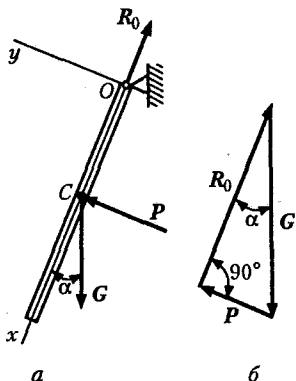


Рис. 2.4

направлениям координатных осей; по найденным двум взаимно-перпендикулярным составляющим легко определяется неизвестная сила.

Если при решении задач аналитическим способом искомая реакция получится отрицательной, то это значит, что действительное ее направление противоположно направлению, принятому на рисунке.

Пример 2.2. Однородная прямоугольная пластинка силой тяжести $G = 5 \text{ Н}$ подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом $\alpha = 18^\circ$ к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую P давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно ее плоскости (рис. 2.4, а).

Решение. Рассмотрим равновесие пластинки. Отбросим шарнир O . Так как пластинка однородная и прямоугольной формы, то равнодействующая P давлений ветра и сила тяжести G пересекаются в геометрическом центре C пластинки; линия действия реакции R_0 шарнира на основании теоремы о равновесии трех непараллельных сил также пройдет через точку C . Для системы трех сходящихся сил, действующих на пластинку, применим аналитическое условие равновесия $\sum Y = 0$, направив ось y перпендикулярно пластинке (чтобы реакция R_0 , которую не требуется определять, не вошла в уравнение равновесия). Составим уравнение равновесия

$$\sum Y = 0; \quad P - G \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ = 5 \cdot 0,309 \approx 1,55 \text{ Н}.$$

Проведем проверку решения задачи с помощью геометрического условия равновесия:

$$\sum F_i = 0; \quad G + P + R = 0.$$

Построим замкнутый силовой треугольник (рис. 2.4, б). Решая его, получаем

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ \approx 1,55 \text{ Н}.$$

Глава 3

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И МОМЕНТ СИЛЫ

3.1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону

Система сил, линии действия которых параллельны и лежат в одной плоскости, называется плоской системой параллельных сил.

Из физики известно (рис. 3.1), что: *две параллельные силы, направленные в одну сторону, эквивалентны равнодействующей, которая равна сумме этих сил, параллельна им и направлена в ту же сторону; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения данных сил, на части, обратно пропорциональные этим силам:*

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad F_1 / F_2 = BC / AC.$$

Применяя производную пропорцию, можно записать:

$$F_1 / BC = F_2 / AC = (F_1 + F_2) / (BC + AC),$$

тогда

$$F_1 / BC = F_2 / AC = F_{\Sigma} / AB.$$

Разложение данной силы на две параллельные составляющие производится с помощью формул сложения двух параллельных сил.

Разложение силы на две параллельные составляющие есть задача неопределенная, имеющая бесчисленное множество решений. Для того чтобы задача имела определенное решение, необходимо иметь два дополнительных условия, например модуль одной составляющей и длину одного плеча, длины двух плеч и т. п.

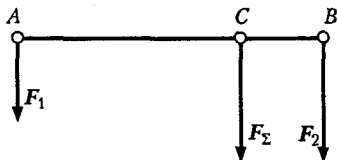


Рис. 3.1

3.2. Сложение двух неравных антипараллельных сил

Рассмотрим случай сложения двух не равных по модулю антипараллельных сил. Случай, когда такие силы равны по модулю, особый, он будет рассмотрен в гл. 4.

Теорема. *Две неравные антипараллельные силы эквивалентны равнодействующей, которая равна разности данных сил, парал-*

лельна им и направлена в сторону большей силы; линия действия равнодействующей делит отрезок, соединяющий точки приложения данных сил, внешним образом на части, обратно пропорциональные этим силам.

Рассмотрим две параллельные силы F_1 и F_2 , причем $F_1 > F_2$ (рис. 3.2). Разложим силу F_1 на две параллельные составляющие F_Σ и F_2' так, чтобы составляющая F_2' была приложена в точке B и $F_2' = F_2$. Тогда на основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получим

$$F_1 = F_\Sigma + F_2';$$

$$F_1 / BC = F_2' / AC = F_\Sigma / AB.$$

Из этих равенств найдем модуль второй составляющей F_Σ и расстояние AC до точки ее приложения (известно, что $F_2' = F_2$).

Данная система сил (F_1, F_2) заменена системой трех сил:

$$(F_1, F_2) \equiv (F_\Sigma, F_2', F_2).$$

Отбросив на основании аксиомы IV две взаимно уравновешенные силы F_2 и F_2' , получим, что данная система эквивалентна одной силе, т. е. равнодействующей F_Σ :

$$(F_1, F_2) \equiv F_\Sigma.$$

Модуль и точка приложения равнодействующей определяются по формулам

$$F_\Sigma = F_1 - F_2; \quad AC = (F_2 / F_\Sigma) AB.$$

Отметим, что равнодействующая двух параллельных сил равна их алгебраической сумме.

Если на тело действует система n параллельных сил, то, производя последовательное сложение сначала двух сил, их равнодействующей с третьей силой, новой равнодействующей с четвертой силой и т. д., найдем модуль и линию действия равнодействующей всей системы параллельных сил.

Очевидно, что равнодействующая системы параллельных сил определится в результате алгебраического сложения сил данной системы:

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

Таким образом, равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме:

$$F_\Sigma = \sum F_i.$$

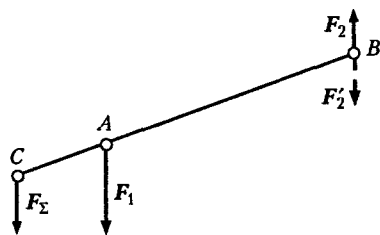


Рис. 3.2

Вопрос о положении линии действия равнодействующей легко решается с помощью теоремы, доказанной в подразд. 5.3.

3.3. Момент силы относительно точки

Рассмотрим гайку, которую затягивают гаечным ключом определенной длины, прикладывая к концу ключа мускульное усилие. Если взять гаечный ключ в несколько раз длиннее, то прилагая то же усилие, гайку можно затянуть значительно сильнее. Из этого следует, что одна и та же сила может оказывать различное вращательное действие. Вращательное действие силы характеризуется моментом силы.

Понятие момента силы относительно точки ввел итальянский ученый и художник эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452–1519).

Моментом силы относительно точки называется произведение модуля силы на ее плечо (рис. 3.3):

$$M_0(F) = Fh.$$

Точка, относительно которой берется момент, называется центром момента. Плечом силы относительно точки называется кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы.

Единица момента силы

$$[M] = [F] \cdot [h] = \text{сила} \times \text{длина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Условимся считать момент силы положительным, если сила стремится вращать свое плечо вокруг центра момента против часовой стрелки, и наоборот (рис. 3.4, а, б).

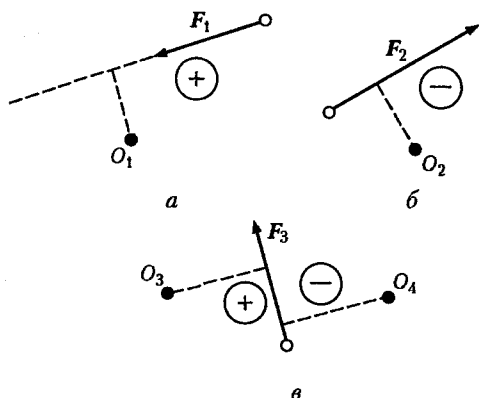


Рис. 3.4

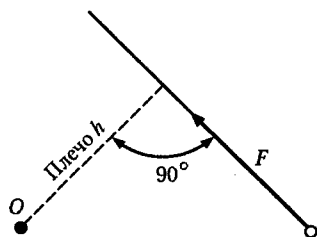


Рис. 3.3

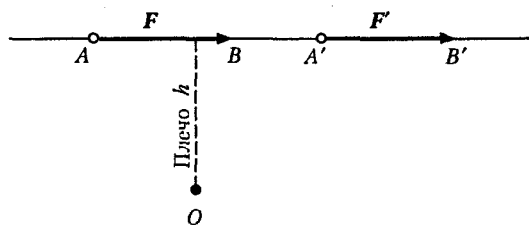


Рис. 3.5

Одна и та же сила относительно разных точек может давать и положительный, и отрицательный момент (рис. 3.4, *в*).

Момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы, *равен нулю*, так как в этом случае плечо равно нулю.

Из рис. 3.5 видно, что момент силы относительно точки не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, так как модуль силы и плечо остаются неизменными.

Глава 4

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАР СИЛ

4.1. Пара сил и момент пары

В подразд. 3.2 был исключен из рассмотрения случай сложения двух антипараллельных сил, равных по модулю. Такая система сил называется *парой сил* или просто *парой* (рис. 4.1).

Понятие пары сил введено в механику в начале XIX в. французским ученым Л. Пуансо (1777–1859), который разработал теорию пар.

Плоскость, в которой расположена пара, называется *плоскостью действия пары*. Расстояние между линиями действия сил есть *плечо пары*. Эффект действия пары состоит в том, что она стремится вращать тело, к которому приложена. Ее вращательное действие определяется *моментом пары*.

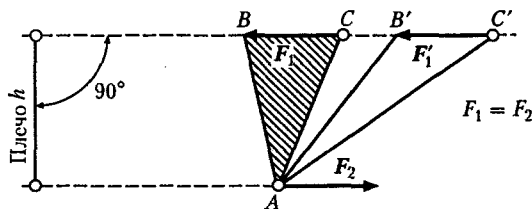


Рис. 4.1

Моментом пары называется произведение модуля одной из сил, составляющих пару, на плечо:

$$M(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = F_1 h = F_2 h = m.$$

Момент пары и момент силы имеют одинаковую размерность. Условимся считать момент пары положительным, если она стремится вращать свое плечо против часовой стрелки, и наоборот.

Момент пары численно равен удвоенной площади треугольника, у которого основанием является вектор одной из сил пары, а высотой — плечо.

Из рис. 4.1 видно, что момент пары не меняется при переносе сил вдоль линий их действия, так как треугольники ABC и $AB'C'$ — равновеликие.

4.2. Основные свойства пары сил

Основные свойства пары сил характеризуются следующими тремя теоремами.

Теорема I. Пара сил не имеет равнодействующей.

Дана пара сил $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ с плечом h (рис. 4.2).

Предположим, что $F_2 > F_1$. Тогда равнодействующая этих сил $F_\Sigma = F_2 - F_1$, а точка ее приложения определяется из пропорции

$$F_\Sigma / F_1 = h / x, \text{ откуда } x = F_1 h / F_\Sigma.$$

Пусть теперь сила F_2 уменьшается и приближается по модулю к силе F_1 , тогда в пределе при $F_1 = F_2$

$$F_\Sigma = F_2 - F_1 = 0.$$

Это значит, что при $F_1 = F_2$ равнодействующая не существует.

Из этой теоремы следует, что пара сил не может быть уравновешена одной силой, пара сил может быть уравновешена только парой.

Теорема II. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно любой точки плоскости действия пары есть величина постоянная, равная моменту пары.

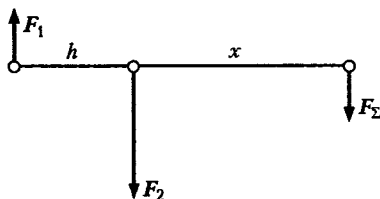


Рис. 4.2

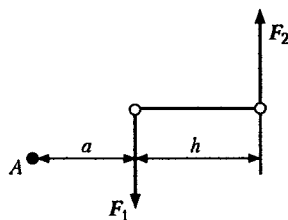


Рис. 4.3

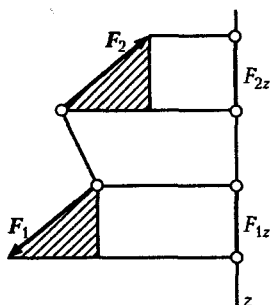


Рис. 4.4

Дана пара (F_1, F_2) с плечом h (рис. 4.3) и моментом $m = F_1 h = F_2 h$.

Выберем в плоскости действия пары произвольную точку A и примем ее за центр моментов:

$$M_A(F_1) = -F_1 a;$$

$$M_A(F_2) = F_2(a+h).$$

Сложим правые и левые части этих равенств: $M_A(F_1) + M_A(F_2) = -F_1 a + F_2 \times (a+h) = F_2 h$, или $M_A(F_1) + M_A(F_2) = m$; теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что *при любом центре моментов пара сил войдет в уравнение моментов с одним и тем же знаком и одной и той же величиной.*

Теорема III. *Алгебраическая сумма проекций сил пары на ось всегда равна нулю.*

Дана пара сил (F_1, F_2) и ось z , лежащая в плоскости действия пары (рис. 4.4). Из равенства заштрихованных треугольников видно, что $F_{1z} = F_{2z}$. Проекция F_{1z} — положительная, проекция F_{2z} — отрицательная, следовательно, их алгебраическая сумма всегда равна нулю.

Из этой теоремы следует, что *пара сил не входит ни в уравнение сил, ни в уравнение проекций сил.*

4.3. Эквивалентные пары

Две пары называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая механического состояния свободного твердого тела.

Теорема об эквивалентных парах формулируется так: *если моменты двух пар алгебраически равны, то эти пары эквивалентны.*

Даны две пары (F, F_1) и (Q, Q_1) , моменты которых алгебраически равны (рис. 4.5), т.е.

$$M(F, F_1) = M(Q, Q_1), \text{ или } Fa = Qb.$$

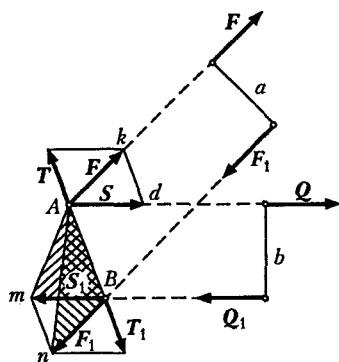


Рис. 4.5

Продолжим линии действия сил пары до их взаимного пересечения в точках A и B . На основании следствия из аксиом III и IV перенесем силы F и F_1 вдоль линий их действия в точки A и B . Соединим эти точки прямой линией и разложим силы F и F_1 по на-

правлению AB и вдоль линий действия сил Q и Q_1 . Из равенства треугольников Akd и Bmn вытекает, что $T = T_1$ и $S = S_1$.

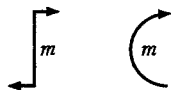


Рис. 4.6

Силы T и T_1 представляют собой уравновешенную систему, так как они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. На основании аксиомы IV такую систему можно отбросить.

Силы S и S_1 представляют собой пару сил с плечом b . Таким образом, пара $(F, F_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Рассмотрим треугольники AmB и AnB . Они имеют общее основание AB , а высоты их равны, следовательно, площадь ΔAmB равна площади ΔAnB .

Но удвоенная площадь ΔAnB численно равна моменту пары (F, F_1) , а удвоенная площадь ΔAmB численно равна моменту пары (S, S_1) , следовательно, $M(F, F_1) = M(S, S_1)$ или $Fa = Sb$.

По условиям теоремы $Fa = Qb$, следовательно, $Sb = Qb$, отсюда $S = Q$, $S_1 = Q_1$.

Силы S и Q равны по модулю, действуют по одной прямой в одну сторону, следовательно, они эквивалентны друг другу; на этом же основании эквивалентны друг другу силы S_1 и Q_1 . Следовательно, пара $(Q, Q_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Но выше доказано, что пара $(F, F_1) \equiv$ паре (S, S_1) .

Так как две пары порознь эквивалентны одной и той же третьей паре, то эти пары эквивалентны между собой, т. е.

$$\text{пара}(F, F_1) \equiv \text{пара}(Q, Q_1),$$

что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы об эквивалентных парах вытекают следующие следствия:

1) не изменяя механического состояния тела, пару можно перемещать как угодно в плоскости ее действия;

2) не изменяя механического состояния тела, можно менять силы и плечо пары, но так, чтобы ее момент оставался неизменным;

3) чтобы задать пару, достаточно задать ее момент, поэтому иногда слово «пара» заменяют словом «момент» и условно изображают его так, как показано на рис. 4.6;

4) условия равновесия плоской системы параллельных сил будут справедливы, если вместе с такой системой действуют и пары сил, так как их можно повернуть в плоскости действия и поставить силы пары параллельно другим силам системы.

4.4. Теорема о сложении пар

Теорема. *Всякая плоская система пар эквивалентна одной результирующей паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар.*

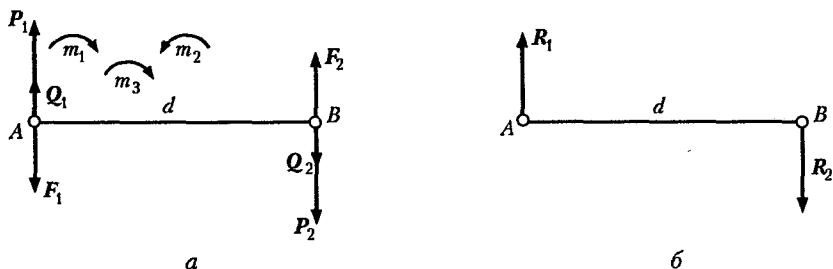


Рис. 4.7

Пусть даны три пары с моментами m_1, m_2, m_3 , действующие в одной плоскости (рис. 4.7, а).

На основании следствия из теоремы об эквивалентных парах преобразуем эти пары так, чтобы их плечи стали равными d , и перенесем к произвольно взятому на плоскости отрезку AB длиной d .

Тогда вместо заданной системы пар получим новую систему, эквивалентную данной, причем моменты данных и новых пар будут равны, т. е.

$$m_1 = -P_1d; \quad m_2 = F_1d; \quad m_3 = -Qd.$$

Сложив три силы в точке A , получим равнодействующую R_1 (рис. 4.7, б), модуль которой

$$R_1 = P_1 + Q_1 - F_1.$$

Сложив три силы в точке B , получим равнодействующую R_2 , модуль которой

$$R_2 = P_2 + Q_2 - F_2,$$

причем очевидно, что силы R_1 и R_2 равны по модулю, параллельны и противоположно направлены.

Значит, система (R_1, R_2) представляет собой пару с плечом d , эквивалентную данной системе пар.

Момент этой результирующей пары

$$m = -R_1d = -(P_1 + Q_1 - F_1)d = -P_1d - Q_1d + F_1d,$$

или

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Аналогичное доказательство можно привести для любой плоской системы пар, т. е. в общем виде можно записать

$$m = \sum m_i,$$

что и требовалось доказать.

4.5. Условие равновесия плоской системы пар

Применяя доказанную в подразд. 4.4 теорему к плоской системе пар, находящейся в равновесии, запишем

$$m = \sum m_i = 0.$$

Следовательно, условие равновесия плоской системы пар в общем виде будет выглядеть так:

$$\sum m_i = 0,$$

а формулируется следующим образом: для равновесия плоской системы пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов данных пар равнялась нулю.

4.6. Опоры и опорные реакции балок

Опоры балок по их устройству могут быть разделены на три основных типа (рис. 4.8): шарнирно-подвижная (опора A); шарнирно-неподвижная (опора B); жесткая заделка (опора C). На рис. 4.8 показаны два способа условного изображения шарнирно-подвижной опоры (опора A).

Применим правило для определения направления реакций связей (см. подразд. 1.5).

Шарнирно-подвижная опора допускает поворот вокруг оси шарнира и линейное перемещение параллельно опорной плоскости. Если пренебречь трением на опоре и в шарнире, то реакция такой связи будет направлена перпендикулярно опорной плоскости и неизвестна только по модулю (одно неизвестное).

Шарнирно-неподвижная опора допускает только поворот вокруг оси шарнира и не допускает никаких линейных перемещений. Реакция такой опоры будет направлена перпендикулярно оси шарнира; модуль и направление ее заранее не известны (два неизвестных). Обычно при решении задач такую реакцию раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие, не известные по модулю, но известные по направлению.

Жесткая заделка (защемление) не допускает ни линейных перемещений, ни поворотов защемленного конца балки. Жесткую

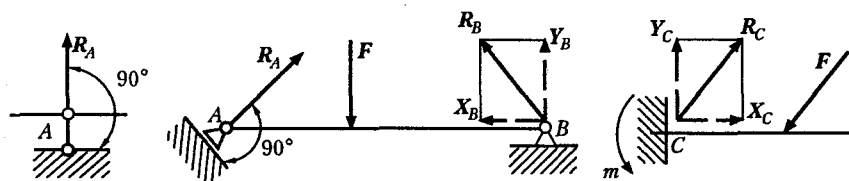


Рис. 4.8

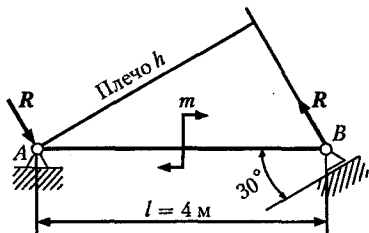


Рис. 4.9

заделку заменяют реактивной силой, не известной по модулю и направлению, и реактивным моментом (три неизвестных). Реактивную силу, не известную по направлению, раскладывают на две взаимно-перпендикулярные составляющие.

Если при решении задачи реактивная сила или реактивный мо-

мент получатся отрицательными, то их действительное направление противоположно принятому.

Кроме перечисленных выше трех основных типов опор балок в конструкциях нередко балка свободно опирается на плоскость (поверхность) или ребро призмы. В этих случаях направление реакций определяют по правилам, изложенным в подразд. 1.5.

Пример 4.1. Горизонтальная балка длиной $l = 4$ м закреплена на опорах (рис. 4.9) и нагружена парой сил с моментом $m = 420$ Н·м. Не учитывая силу тяжести балки, определить реакции опор А и В.

Решение. Отбросим опоры, заменив их реакциями, и рассмотрим равновесие балки. Так как пару сил можно уравновесить только парой, то реакции R опор А и В должны образовывать пару сил, причем реакция шарнирно-подвижной опоры В перпендикулярна опорной плоскости.

Применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия:

$$\sum m_i = 0; \quad -m + Rh = 0,$$

где $h = l \cos 30^\circ$.

Откуда $R = m / h = m / (l \cos 30^\circ) = 420 / (4 \cdot 0,866) \approx 120$ Н.

Пример 4.2. Консольная балка (рис. 4. 10) длиной $l = 2$ м нагружена на конце силой $F = 3000$ Н. Не учитывая силу тяжести балки, определить реакции заделки.

Решение. Отбросим заделку, заменив ее реакциями, и рассмотрим равновесие балки. Реакции заделки представляют собой реактивную силу R и реактивный момент m .

Так как реактивный момент m может быть уравновешен только парой сил, то нагрузка F и реакция R должны образовывать пару, следовательно,

$$R = F = 3000 \text{ Н.}$$

Далее применим условие равновесия плоской системы пар и составим уравнение равновесия:

$$\sum m_i = 0; \quad m - Fl = 0,$$

откуда

$$m = Fl = 3000 \cdot 2 = 6000 \text{ Н·м.}$$

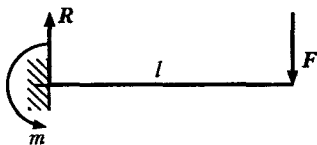


Рис. 4.10

Глава 5

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

5.1. Лемма о параллельном переносе силы

Лемма. *Механическое состояние твердого тела не нарушится, если данную силу перенести параллельно первоначальному положению в произвольную точку тела, добавив при этом пару, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.*

Возьмем тело, находящееся под действием некоторой системы сил, в числе которых есть сила F , приложенная в точке A (рис. 5.1). Выберем произвольную точку O , которую назовем центром приведения, и на основании аксиомы IV приложим в этой точке две равные силы F' и F'' , параллельные данной силе F , причем

$$F' = F'' = F.$$

Систему сил (F, F', F'') , эквивалентную силе F , представим как силу F' , перенесенную параллельно первоначальному положению в произвольно выбранный центр приведения O , и пару (F, F'') , момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения O , являющегося новой точкой приложения силы:

$$M(F, F'') = Fa = M_O(F).$$

Лемма доказана.

Описанный выше перенос силы можно показать на примере. Рассмотрим колесо A радиусом r , вращающееся на оси в подшипниках (рис. 5.2). Пусть к ободу колеса по касательной приложена сила F (такую силу называют окружной).

Для определения действия силы F на колесо и подшипники применим доказанную лемму и перенесем эту силу параллельно самой себе на ось колеса. В результате получим силу $F' = F$, вызы-

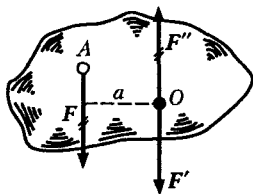


Рис. 5.1

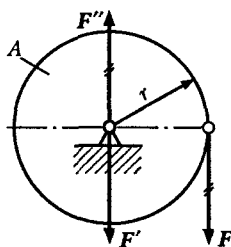


Рис. 5.2

вающую давление на подшипники, и пару сил (F, F'') с моментом, равным $F r$, которая будет вращать колесо.

5.2. Приведение плоской системы произвольно расположенных сил к данному центру

Приведением системы сил называется замена ее другой системой, эквивалентной первой, но более простой.

Теорема. *Плоская система произвольно расположенных сил в общем случае эквивалентна одной силе, приложенной в центре приведения, и одной паре.*

Пусть дана плоская система n произвольно расположенных сил $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n)$. Перенесем параллельно все силы в произвольно выбранный в плоскости действия сил центр приведения O , добавив при этом n пар (рис. 5.3). Моменты этих пар $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ равны моментам данных сил относительно центра приведения O .

Вместо заданной системы n произвольно расположенных сил мы получили систему n сил, приложенных в центре приведения, равных данным силам по модулю и одинаковых с ними по направлению, и систему n присоединенных пар:

$$F'_1 = F_1, F'_2 = F_2, F'_3 = F_3, \dots, F'_n = F_n;$$

$$m_1 = M_O(F_1), m_2 = M_O(F_2), m_3 = M_O(F_3), \dots, m_n = M_O(F_n).$$

Эта новая система эквивалентна данной.

Плоская система сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе, которая равна векторной сумме этих сил и приложена в той же точке, следовательно,

$$F'_1 + F'_2 + F'_3 + \dots + F'_n = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{\text{гл}},$$

$$\text{или } F_{\text{гл}} = \sum F_i.$$

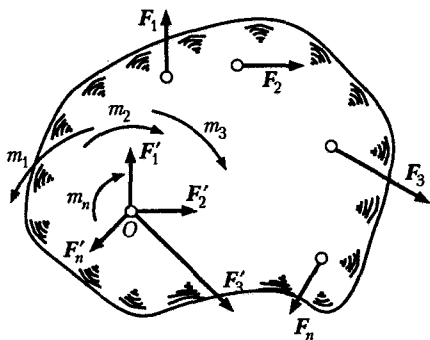


Рис. 5.3

Эту силу назовем главным вектором данной системы. Главный вектор плоской системы произвольно расположенных сил равен векторной сумме всех сил системы и приложен в центре приведения.

Графически главный вектор выражается замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на данных си-

лах. Аналитически модуль главного вектора можно вычислить по формуле

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2},$$

а направляющий косинус — по формуле

$$\cos(F_{\text{гл}}, x) = F_{\text{гл}x} / F_{\text{гл}}.$$

Плоская система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов данных пар, следовательно,

$$\begin{aligned} M_{\text{гл}} &= m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n = \\ &= M_O(F_1) + M_O(F_2) + M_O(F_3) + \dots + M_O(F_n), \end{aligned}$$

или

$$M_{\text{гл}} = \sum M_O(F_i).$$

Эту пару с моментом $M_{\text{гл}}$ назовем **главным моментом** заданной системы сил.

Главный момент плоской системы произвольно расположенных сил равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения.

Таким образом, всякая плоская система сил в общем случае эквивалентна системе, состоящей из силы и пары сил, следовательно, теорема доказана.

Не следует считать, что главный вектор и главный момент имеют чисто формальное значение, введенное для удобства доказательства, и что их можно найти только с помощью вычислений. Нередко отдельно действующие на тело силы определить трудно или невозможно, а главный вектор или главный момент этих сил найти сравнительно легко. Так, например, число точек контакта и модули сил трения между вращающимся валом и подшипником скольжения, как правило, неизвестны, но главный момент этих сил можно определить простым измерением; еще один пример: в характеристику электродвигателя входит не сила, с которой статор действует на ротор, а вращающий момент.

5.3. Свойства главного вектора и главного момента

Свойства главного вектора и главного момента заключаются в следующем:

1) *модуль и направление главного вектора данной системы не зависят от выбора центра приведения*, так как при любом центре приведения силовой многоугольник, построенный на данных силах, будет один и тот же;

2) величина и знак главного момента в общем случае зависят от выбора центра приведения (кроме одного случая, о котором будет сказано в подразд. 5.4), так как при перемене центра приведения меняются плечи сил, а модули их остаются неизменными;

3) главный вектор и равнодействующая системы сил векторно равны, но в общем случае не эквивалентны. Пусть известны главный вектор $F_{\text{гл}}$ и главный момент $M_{\text{гл}}$ какой-то плоской системы сил (рис. 5.4, а). Определим равнодействующую этой системы.

Пользуясь известным свойством пары сил, преобразуем главный момент $M_{\text{гл}}$ так, чтобы силы пары F и F_{Σ} (рис. 5.4, б) были параллельны и по модулю равны главному вектору $F_{\text{гл}}$:

$$F_{\Sigma} = F = F_{\text{гл}}; \quad M_{\text{гл}} = M(F_{\Sigma}, F),$$

причем сила F приложена к точке O противоположно $F_{\text{гл}}$.

Далее систему $(F_{\text{гл}}, F)$, как взаимно уравновешенную, отбросим:

$$(F_{\text{гл}}, M_{\text{гл}}) = (F_{\text{гл}}, F, F_{\Sigma}) \equiv F_{\Sigma}.$$

В результате получим одну силу F_{Σ} , эквивалентную главному вектору и главному моменту, т.е. равнодействующую системы, причем

$$F_{\Sigma} = F_{\text{гл}}.$$

Модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = F_{\text{гл}},$$

а положение линии действия равнодействующей определяется плечом d по формуле

$$d = M_{\text{гл}} / F_{\text{гл}}.$$

В результате можно считать установленным, что главный вектор и равнодействующая векторно равны, но не эквивалентны;

4) главный вектор и равнодействующая эквивалентны лишь в частном случае, когда главный момент системы равен нулю; это возможно в случае, когда центр приведения находится на линии действия равнодействующей.

Из рис. 5.4 видно, что момент равнодействующей F_{Σ} относительно центра приведения O равен моменту $M_{\text{гл}}$ пары (F_{Σ}, F) , т.е. главному моменту данной системы:

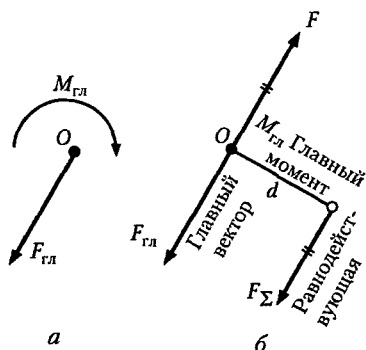


Рис. 5.4

$$M_o(F_{\Sigma}) = M(F_{\Sigma}, F) = M_{\text{гл}}.$$

Так как $M_{\text{гл}} = \sum M_o(F_i)$, а за центр приведения можно взять любую точку плоскости действия сил данной системы, то всегда имеем

$$M(F_{\Sigma}) = \sum M(F_i).$$

Полученная формула является математическим выражением теоремы о моменте равнодействующей.

Теорема. *Момент равнодействующей силы относительно какой-либо точки, расположенной в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.*

Теорему о моменте равнодействующей впервые доказал французский ученый П. Вариньон (1654—1722), поэтому ее называют теоремой Вариньона.

Применим доказанную теорему для определения положения линии действия равнодействующей F_{Σ} плоской системы n параллельных сил:

$$(F_1 + F_2 + F_3 + \dots, F_n) \equiv F_{\Sigma}.$$

Выберем какую-либо точку O плоскости действия сил за центр моментов и согласно теореме Вариньона запишем

$$\sum M_o(F_i) = M_o(F_{\Sigma}) = F_{\Sigma}d,$$

где d — плечо равнодействующей F_{Σ} относительно точки O .

Из последнего равенства определяем плечо d :

$$d = \frac{\sum M_o(F_i)}{F_{\Sigma}} = \frac{\sum M_o(F_i)}{\sum F_i},$$

так как $F_{\Sigma} = \sum F_i$.

Чтобы установить, в какую сторону от точки O следует на перпендикуляре к линиям действия сил отложить плечо d , следует учесть направление вектора F_{Σ} и знак $\sum M_o(F_i)$.

5.4. Различные случаи приведения плоской системы произвольно расположенных сил

Изучив свойства главного вектора и главного момента, укажем четыре возможных случая приведения плоской системы произвольно расположенных сил.

1. $F_{\text{гл}} \neq 0$, $M_{\text{гл}} \neq 0$. В этом случае система сил эквивалентна равнодействующей, которая равна по модулю главному вектору, па-

раллельна ему, направлена в ту же сторону, но по другой линии действия.

2. $F_{\text{гл}} \neq 0$, $M_{\text{гл}} = 0$. В этом случае система сил эквивалентна равнодействующей, линия действия которой проходит через центр приведения и совпадает с главным вектором.

3. $F_{\text{гл}} = 0$, $M_{\text{гл}} \neq 0$. В этом случае система эквивалентна паре сил. Так как модуль и направление главного вектора во всех случаях не зависят от выбора центра приведения, то в рассматриваемом случае величина и знак главного момента тоже не зависят от центра приведения, ибо одна и та же система сил не может быть эквивалентна различным парам.

4. $F_{\text{гл}} = 0$, $M_{\text{гл}} = 0$. В этом случае система сил эквивалентна нулю, т.е. находится в равновесии.

5.5. Аналитические условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил

Как известно, плоская система произвольно расположенных сил находится в равновесии, когда и главный вектор, и главный момент равны нулю:

$$F_{\text{гл}} = 0; M_{\text{гл}} = 0.$$

Но $F_{\text{гл}} = \sum F_i$ и равенство $F_{\text{гл}} = 0$ означает, что силовой многоугольник, построенный на силах данной системы, должен быть замкнут, следовательно, алгебраическая сумма проекций сил на каждую из двух осей координат x и y должна равняться нулю, т.е.

$$\sum X = 0; \sum Y = 0.$$

Главный момент $M_{\text{гл}} = \sum M_O(F_i)$ и равенство $M_{\text{гл}} = 0$ означают, что алгебраическая сумма моментов сил данной системы относительно любого центра приведения равняется нулю, следовательно,

$$\sum M(F_i) = 0.$$

Итак, для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на оси координат x и y равнялись нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.

Условия равновесия упрощенно запишем в виде равенств:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0.$$

Отметим, что выведенные ранее условия равновесия системы сходящихся сил, системы параллельных сил и системы пар являются частными случаями условий равновесия, полученных в этом подразделе.

При решении некоторых задач бывает целесообразно вместо одного или двух уравнений проекций составлять уравнения моментов.

Если заменить одно уравнение проекций, то условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил будут выглядеть так:

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0.$$

Однако следует помнить, что эти условия становятся *недостаточными* для равновесия, когда центры моментов A и B лежат на одном перпендикуляре к оси x : в этом случае даже при выполнении указанных условий система сил может иметь равнодействующую, проходящую через эти точки, и, следовательно, не быть в равновесии.

Если заменить два уравнения проекций, то условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил будут выглядеть так:

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0.$$

Эти условия становятся *недостаточными* для равновесия, когда центры моментов A , B и C лежат на одной прямой; в этом случае даже при выполнении указанных условий система сил может иметь равнодействующую, проходящую через эти точки, и, следовательно, не быть в равновесии.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил являются частным случаем условий равновесия, полученных в этом подразделе. Если ось y расположить параллельно линиям действия системы параллельных сил, то уравнение равновесия $\sum X = 0$ обратится в тождество, а $\sum Y = \sum F_i$, т.е. алгебраическая сумма проекций сил системы на ось y будет равна алгебраической сумме этих сил. Тогда условия равновесия плоской системы параллельных сил запишутся следующим образом:

$$\sum F_i = 0; \quad \sum M = 0$$

и сформулируются так: *для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма всех сил равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.*

Так как все виды аналитических условий равновесия действительны для любых прямоугольных осей координат, то в процессе

решения одной задачи или при проверке решения о с и к о о р д и н а т м о ж н о и з м е н и т ь, т.е. одни уравнения проекций сил составить для одной системы координат, а другие — для новой системы координат. Этот прием в некоторых случаях упрощает решение или проверку решения задач. При этом следует помнить, что число уравнений равновесия, составляемых для решения (но не для проверки решения), не должно быть больше числа условий равновесия, соответствующих системе сил, рассматриваемых в задаче.

При решении задач статики аналитическим способом целесообразно составлять уравнения равновесия так, чтобы в каждом из них была только одна неизвестная величина. Во многих случаях этого можно достигнуть, если рационально выбрать оси координат и центры моментов.

Пример 5.1. Горизонтальная балка, поддерживающая баллон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 2 \text{ кН/м}$ (рис. 5.5). На балку у свободного конца C передается нагрузка от колонны $P = 2 \text{ кН}$. Расстояние от оси колонны до стены $l = 1,5 \text{ м}$. Определить реакции заделки A .

Решение. Отбросим заделку, заменим ее реакциями и рассмотрим равновесие балки. Реакции стены представляют собой реактивную силу R и реактивный момент m . Реактивная сила вертикальна, так как активные силы, действующие на балку, горизонтальных составляющих не имеют. Распределенную нагрузку заменим ее равнодействующей ql .

Применим условия равновесия плоской системы параллельных сил и составим два уравнения равновесия:

$$\sum Y = \sum F_i = 0; \quad R - ql - P = 0,$$

откуда $R = ql + P = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}$;

$$\sum M_A = 0; \quad +m - ql \cdot l / 2 - Pl = 0,$$

откуда $m = Pl + ql^2 / 2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \cdot 2,25 / 2 = 5,25 \cdot 10^3 \text{ Н·м}$.

Проверим решение, составив *контрольное уравнение* моментов относительно точки C :

$$\sum M_C = 0; \quad m - Rl + ql^2 / 2 = 0.$$

Подставив значения, получим

$$5,25 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \cdot 2,25 / 2 = 0.$$

Полученное тождество $0 = 0$ свидетельствует, что решение верное.

Пример 5.2. Предохранительный клапан A парового котла соединен стержнем AB с однородным рычагом CD длиной 50 см и силой тяжести 10 Н , который может вращаться вокруг неподвижной оси C ; диаметр клапана $d = 6 \text{ см}$, плечо $CB = 7 \text{ см}$ (рис. 5.6).

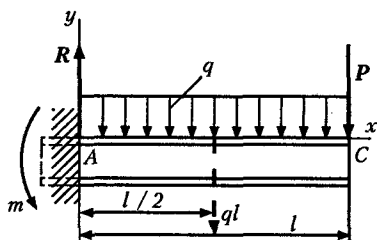


Рис. 5.5

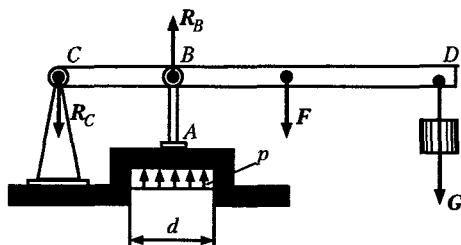


Рис. 5.6

Какой груз G нужно подвесить к концу D рычага для того, чтобы клапан сам открывался при давлении в котле $p = 110 \text{ Н/см}^2$?

Решение. Рассмотрим равновесие рычага CD . Реакция R_B клапана будет направлена вверх,

$$R_B = p \pi d^2 / 4 = 110 \cdot 10^4 \pi \cdot 6^2 \cdot 10^{-4} / 4 = 3109 \text{ Н.}$$

Так как реакцию R_C шарнира C определять не нужно, то составим уравнение моментов относительно точки C :

$$\sum M_C = 0; \quad -G \cdot CD - F \cdot CD / 2 + R_B \cdot CB = 0.$$

Подставим значения и определим G :

$$G = (3109 \cdot 7 \cdot 10^{-2} - 10 \cdot 25 \cdot 10^{-2}) / (50 \cdot 10^{-2}) = 430 \text{ Н.}$$

Пример 5.3. На рис. 5.7 схематически изображен подъемный кран. В точке D на расстоянии 5 м от оси AB крана подвешен груз $P = 50 \text{ кН}$. Сила тяжести крана $G = 30 \text{ кН}$. Определить реакции подпятника A и подшипника B .

Решение. Рассмотрим равновесие крана. Реакция R_B подшипника B направлена перпендикулярно его оси, реакцию подпятника A разложим на две составляющие: X_A и Y_A . Таким образом, к крану приложена плоская система пяти произвольно расположенных сил, из которых три неизвестны. Применим к этой системе аналитические условия равновесия и составим три уравнения:

$$\sum M_A = 0; \quad +R_B \cdot 7 - G \cdot 1,5 - P \cdot 5 = 0;$$

$$\sum X = 0; \quad -R_B + X_A = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_A - P - G = 0.$$

Решая первое уравнение, получим

$$\begin{aligned} R_B &= (G \cdot 1,5 + P \cdot 5) / 7 = \\ &= (30 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 50 \cdot 10^3 \cdot 5) / 7 = \\ &= 42,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 42,1 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из второго уравнения получим

$$X_A = R_B = 42,1 \text{ кН.}$$

Из третьего уравнения находим

$$Y_A = P + G = 50 + 30 = 80 \text{ кН.}$$

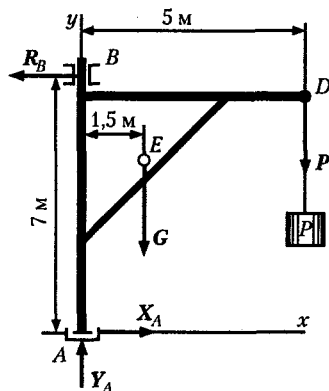


Рис. 5.7

Глава 6

ТРЕНИЕ

6.1. Понятие о трении

Абсолютно гладких и абсолютно твердых тел в природе не существует, и поэтому при перемещении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление, которое называется *т р е н и е м*. *Трение — явление сопротивления относительному перемещению, возникающее между двумя телами в зонах соприкосновения поверхностей по касательной к ним.*

Трение — явление, чрезвычайно распространенное в природе и имеющее большое значение. На трении основана работа ременных и фрикционных передач, тормозных устройств, прокатных станов, наклонных транспортеров, фрикционных муфт и т.п. Трение обеспечивает сцепление с землей и, следовательно, работу автомобилей, тракторов и других транспортных машин. При отсутствии трения человек не мог бы ходить. Наряду с этим трение во многих случаях является вредным сопротивлением, на преодоление которого нередко затрачивается весьма большое количество энергии. Эти затраты энергии бесполезны и их стремятся уменьшить.

На рис. 6.1 приведена схема классификации трения по наличию и характеру движения.

Трением покоя называется трение двух тел при микросмещениях без макросмещения (т.е. при малом относительном перемещении тел в пределах перехода от покоя к относительному движению).

Трением движения называется трение двух тел, находящихся в относительном движении.

Далее рассмотрим виды трения в зависимости от наличия и характера относительного движения.

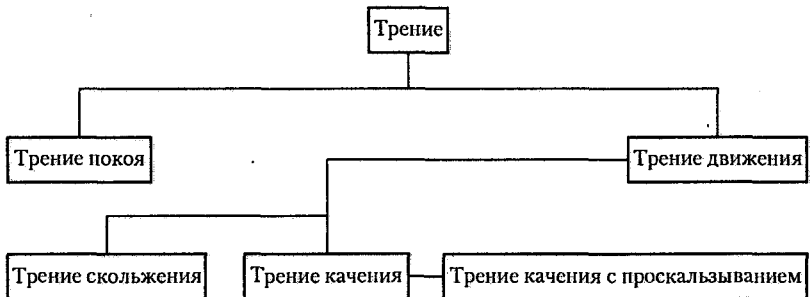


Рис. 6.1

6.2. Трение скольжения

Трением скольжения называется трение движения, при котором скорости тел в точке касания различны по значению и (или) направлению. Трение скольжения, как и трение покоя, обусловлено прежде всего шероховатостью и деформацией поверхностей, а также наличием молекулярного сцепления у прижатых друг к другу тел. Трение скольжения сопровождается изнашиванием, т.е. отделением или остаточной деформацией материала, а также нагревом трущихся поверхностей тел (остаточной называется деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил). Трение характеризуется силой трения.

Сила трения есть сила сопротивления относительному перемещению двух тел при трении.

Возьмем тело, лежащее на горизонтальной шероховатой плоскости (рис. 6.2). Сила тяжести G уравнивается нормальной реакцией N . Если к телу приложить небольшую движущую силу P , то оно не придет в движение, так как эта сила будет уравниваться силой трения $F_{\text{тр}}$, которая является, таким образом, реакцией опорной плоскости, направленной вдоль плоскости.

Если постепенно увеличивать сдвигающую силу P , то до определенного ее значения тело будет оставаться в покое; при дальнейшем увеличении силы P тело придет в движение.

Отсюда видно, что сила трения в состоянии покоя в зависимости от степени микросмещения может изменяться от нуля до какого-то максимального значения $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$, причем по модулю сила трения $F_{\text{тр}}$ всегда равна сдвигающей силе P (если P не больше $F_{\text{тр}}^{\text{max}}$).

Максимальное значение сила трения покоя имеет в момент начала относительного движения. Это значение называется наибольшей силой трения покоя или просто силой трения покоя.

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную направлению относительного движения тела.

В XVIII в. французские ученые Амонтон, а затем Ш. Кулон провели серьезные исследования в области трения и на основе их сформулировали три основных закона трения скольжения, обычно называемых законами Кулона:

1. Сила трения не зависит от величины площади трущихся поверхностей.

2. Максимальная сила трения прямо пропорциональна нормальной составляющей внешних сил, действующих на поверхности тела.

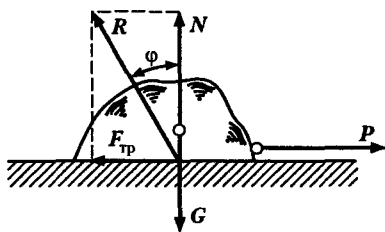


Рис. 6.2

3. Сила трения зависит от материала тел, состояния трущихся поверхностей, наличия и рода смазки.

Первый закон можно подтвердить следующими соображениями. Если площадь трущихся поверхностей увеличится, то увеличится и количество сцепляющихся неровностей, но уменьшится давление (на единицу площади) и сопротивление относительно перемещению останется прежним.

Второй закон говорит о том, что если увеличится нормальная составляющая внешних сил, действующих на поверхности тела (иначе говоря, увеличится сила нормального давления или реакции), то во столько же раз возрастет максимальная сила трения.

Отношение силы трения $F_{тр}$ к нормальной составляющей N внешних сил, действующих на поверхности тела, называется коэффициентом трения скольжения, и обозначается f (при наибольшей силе трения покоя это отношение называется коэффициентом сцепления).

Таким образом,

$$f = F_{тр} / N \quad \text{или} \quad F_{тр} = fN. \quad (6.1)$$

В результате второй закон трения скольжения можно сформулировать так: сила трения равна коэффициенту трения скольжения, умноженному на силу нормального давления или реакции.

Очевидно, что коэффициент трения скольжения — величина безразмерная.

Нормальная реакция N опорной поверхности и сила трения $F_{тр}$ дают равнодействующую R , которая называется полной реакцией опорной поверхности (см. рис. 6.2):

$$R = N + F_{тр}.$$

Полная реакция R составляет с нормалью к опорной поверхности какой-то угол. Максимальное значение этого угла (что будет в момент начала движения) называется углом трения и обозначается φ . Из рис. 6.2 очевидно, что

$$F_{тр} = N \operatorname{tg} \varphi. \quad (6.2)$$

Сравнивая равенства (6.1) и (6.2), получим

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

т.е. коэффициент трения скольжения равен тангенсу угла трения.

Если коэффициент трения скольжения одинаков для всех направлений движения, то множество (геометрическое место) полных реакций образует круговой конус, ко-

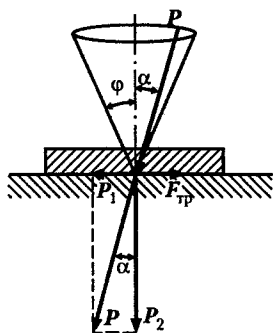


Рис. 6.3

торый называется конусом трения (рис. 6.3). Если для разных направлений движения коэффициент трения неодинаков (например, при скольжении по дереву вдоль и поперек волокон), то конус трения будет некруговым.

Свойство конуса трения заключается в том, что для равновесия тела, лежащего на шероховатой поверхности, равнодействующая приложенных к нему активных сил должна проходить внутри конуса трения.

Действительно, если равнодействующую P активных сил, приложенных к телу, разложить на составляющие P_1 (движущая сила) и P_2 (сила нормального давления), то

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg} \alpha.$$

По второму закону трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fP_2 = P_2 \operatorname{tg} \varphi.$$

Следовательно, при $\alpha < \varphi$ будет

$$P_1 < F_{\text{тр}}$$

и движение окажется невозможным.

Согласно третьему закону трения скольжения, коэффициент трения скольжения зависит от материалов трущихся тел, качества обработки поверхностей, рода и температуры смазки.

В зависимости от наличия между сопрягаемыми поверхностями слоя смазки трение подразделяется на два вида: трение без смазочного материала и трение в условиях смазки и.

Коэффициент трения скольжения определяют опытным путем; значения его для различных условий приведены в справочниках.

Приведем ориентировочные значения коэффициентов f трения скольжения (при покое):

Металл по металлу без смазки.....	0,15...0,30
То же, со смазкой	0,10...0,18
Дерево по дереву без смазки.....	0,40...0,60
Кожа по чугуну без смазки	0,30...0,50
То же, со смазкой	0,15
Сталь по льду	0,02

Коэффициент трения скольжения при движении обычно меньше, чем при покое, и в первом приближении не зависит от скорости относительного перемещения тел.

Методы решения задач статики при наличии трения остаются такими же, как и при отсутствии его, причем в уравнения равновесия обычно вводят максимальные значения сил трения.

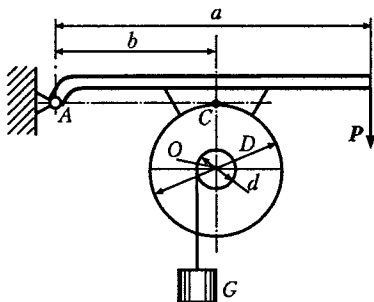


Рис. 6.4

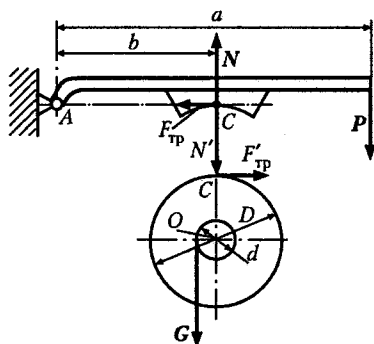


Рис. 6.5

Пример 6.1. Диаметр шайбы колодочного тормоза $D = 500$ мм, диаметр барабана $d = 100$ мм, сила $P = 200$ Н, груз $G = 1500$ Н, коэффициент трения $f = 0,4$ (рис. 6.4). Определить отношение размеров a/b , при котором прекратится движение. Угол ACO — прямой.

Решение. В момент, когда движение прекратится, мысленно расчленим данную систему тел на две части и рассмотрим сначала равновесие барабана с шайбой, а затем равновесие рычага с колодкой (рис. 6.5). Согласно аксиоме взаимодействия, нормальная реакция $N = N'$, а сила трения $F_{тр} = F'_{тр}$. На основании второго закона трения скольжения равнодействующая сил трения колодки о шайбу

$$F_{тр} = fN.$$

К обеим частям системы применим условие равновесия и составим два уравнения равновесия:

для шайбы

$$\sum M_O = 0: -F'_{тр}D/2 + Gd/2 = 0;$$

для рычага

$$\sum M_A = 0: -Pa + Nb = 0.$$

Решим полученную систему из трех уравнений. Из первых двух уравнений найдем N :

$$F'_{тр} = Gd/D = fN, \text{ откуда } N = Gd/(fD).$$

Полученное выражение подставим в третье уравнение:

$$Pa = Nb = [Gd/(fD)]b.$$

Отсюда определим отношение

$$a/b = Gd/(fDP) = 1500 \cdot 0,1 / (0,4 \cdot 0,5 \cdot 200) = 3,75.$$

Полученный результат минимален. Очевидно, что движения не будет при $a/b \geq 3,75$.

6.3. Трение на наклонной плоскости

Рассмотрим тело, лежащее на шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью (рис. 6.6). Разложим силу G на составляющие G_1 и G_2 , параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости. Модули этих составляющих определим по следующим формулам:

$$G_1 = G \sin \alpha; \quad G_2 = G \cos \alpha.$$

Составляющая G_2 уравнивается реакцией N наклонной плоскости. Таким образом,

$$G_2 = N = G \cos \alpha.$$

Составляющая G_1 стремится сдвинуть тело вдоль наклонной плоскости. Полностью или частично эта составляющая уравнивается силой трения; согласно второму закону трения скольжения, ее максимальное значение равно

$$F_{\text{тр}} = fN = fG \cos \alpha,$$

где f — коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости.

Для того чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, находилось в равновесии, движущая сила G_1 должна быть по модулю равна силе трения $F_{\text{тр}}$, т. е.

$$G \sin \alpha = fG \cos \alpha \quad \text{или} \quad \text{tg } \alpha = f = \text{tg } \varphi,$$

откуда $\alpha = \varphi$.

Если угол, который наклонная плоскость составляет с горизонтом, равен углу трения, то тело, лежащее на наклонной плоскости, будет под действием собственной силы тяжести либо равномерно скользить вниз, либо находиться в покое.

Для того чтобы тело, лежащее на наклонной плоскости, заведомо не скользило вниз под действием собственной силы тяжести, должно быть соблюдено условие $\alpha < \varphi$.

Наклонной плоскостью с переменным углом наклона к горизонту пользуются для экспериментального определения угла трения φ и коэффициента трения f (рис. 6.7).

Определим модуль силы P , параллельной наклонной плоскости, в случае равномерного перемещения тела вверх по шероховатой наклонной плоскости (рис. 6.8).

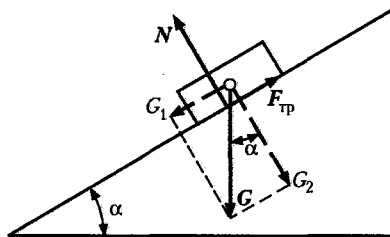
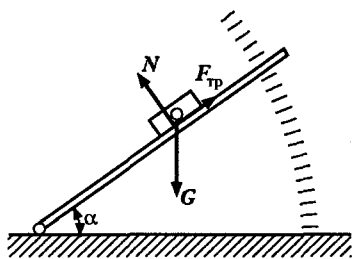


Рис. 6.6



При $\alpha = \varphi$ $f = \operatorname{tg} \alpha$

Рис. 6.7

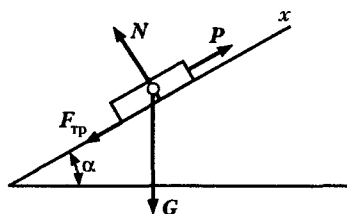


Рис. 6.8

Спроецируем силы, действующие на тело, на ось x . Составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0; P - G \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0.$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = fG \cos \alpha,$$

то

$$P = G \sin \alpha = fG \cos \alpha.$$

Определим модуль горизонтальной силы P , которую надо приложить к телу для равномерного перемещения его вверх по шероховатой наклонной плоскости (рис. 6.9).

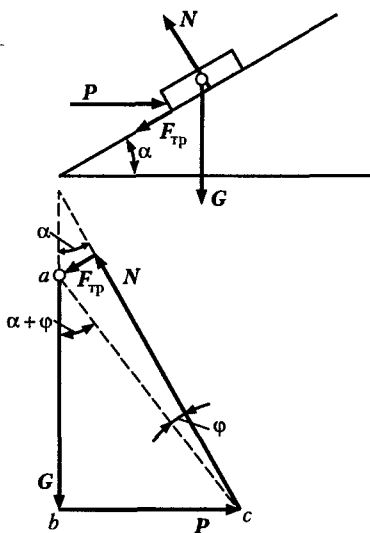


Рис. 6.9

Применим геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил (размерами тела пренебрегаем) и построим замкнутый силовой многоугольник, соответствующий уравнению равновесия

$$G + P + N + F_{\text{тр}} = 0.$$

Из треугольника abc

$$P = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Этот случай движения имеет место при взаимном перемещении винта и гайки с прямоугольной резьбой, так как резьбу винта можно рассматривать как наклонную плоскость, угол наклона которой равен углу подъема винтовой линии.

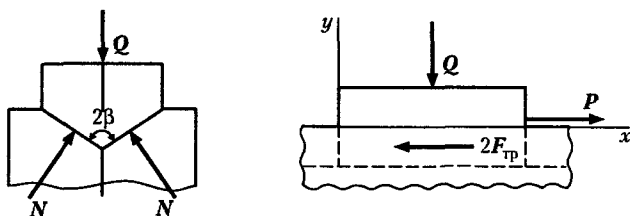


Рис. 6.10

Трение в резбе, имеющей треугольный или трапецеидальный профиль, подобно *трению в клинчатом ползуне*. Поэтому рассмотрим клинчатый ползун с углом заострения 2β , нагруженный вертикальной силой Q (рис. 6.10). Определим силу P , необходимую для равномерного перемещения ползуна вдоль горизонтальных направляющих, если коэффициент трения скольжения равен f .

Составим два уравнения равновесия ползуна:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \quad P - 2F_{\text{тр}} = 0; \\ \sum Y &= 0; \quad 2N \sin \beta - Q = 0,\end{aligned}$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения на каждой грани ползуна; N — нормальная реакция направляющей.

Решая эту систему уравнений и учитывая, что $F_{\text{тр}} = fN$, получим

$$P = (f / \sin \beta) Q = f' Q,$$

где $f' = f / \sin \beta$ — приведенный коэффициент трения.

Соответствующий этому приведенному коэффициенту угол трения обозначим φ' и назовем приведенным углом трения, тогда

$$f' = \operatorname{tg} \varphi'.$$

Очевидно, что $f' > f$, следовательно, при прочих равных условиях *трение в клинчатом ползуне больше трения на плоскости*.

Понятие приведенного коэффициента трения условно, так как он изменяется в зависимости от угла заострения клинчатого ползуна.

По аналогии с движением тела вверх по наклонной плоскости под действием горизонтальной силы для равномерного перемещения клинчатого ползуна по направляющим, наклоненным к горизонту под углом α , нужно приложить горизонтальную силу, равную

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi').$$

Трение в крепежной метрической резбе подобно трению клинчатого ползуна с углом заострения $2\beta = 120^\circ$, для трапецеидальной резьбы угол $2\beta = 150^\circ$.

Расчеты с учетом трения в резьбе рассматриваются при изучении предмета «Детали машин».

Наибольший угол, который составляет с горизонтом наклонная плоскость, образованная сыпучим телом, называется *углом естественного откоса*. Угол естественного откоса сыпучего тела равен углу трения между его частицами. Этот угол приходится принимать во внимание, например при различных земляных работах.

6.4. Трение качения

Трением качения называется трение движения, при котором скорости соприкасающихся тел в точках касания одинаковы по значению и направлению.

Если движение двух соприкасающихся тел происходит при одновременном качении и скольжении, то в этом случае возникает трение качения с проскальзыванием.

Рассмотрим качение без скольжения цилиндра весом G и радиусом r по горизонтальной опорной плоскости (рис. 6.11). Под давлением силы G произойдет деформация цилиндра и опорной плоскости в месте их соприкосновения. Если сила P не действует, то сила G будет уравниваться реакцией R опорной плоскости и цилиндр будет находиться в покое (реакция R будет вертикальна).

Если к цилиндру приложить небольшую силу P , то он по-прежнему будет находиться в покое. При этом произойдет перераспределение давлений на опорную поверхность и полная реакция R пройдет через какую-то точку A и через точку O (согласно теореме о равновесии трех непараллельных сил).

При каком-то критическом значении силы P цилиндр придет в движение и будет равномерно перекатываться по опорной плоскости, а точка A займет крайнее правое положение. Отсюда видно, что трение качения в состоянии покоя может изменяться от нуля до какого-то максимального значения, причем максимальным оно будет в момент начала движения.

Обозначим k максимальное значение плеча силы G относительно точки A . Тогда в случае равномерного перекатывания цилиндра (т.е. равновесия)

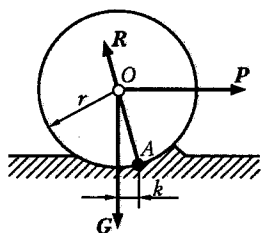


Рис. 6.11

или

$$\sum M_A = 0$$

$$-Pr + Gk = 0,$$

причем плечо силы P вследствие незначительности деформаций тел считаем равным

радиусу r цилиндра (сила P — горизонтальная). Из последнего равенства определим силу, необходимую для равномерного качения цилиндра:

$$P = kG / r.$$

Максимальное значение плеча k называется коэффициентом трения качения; он имеет размерность длины и выражается в сантиметрах или миллиметрах.

Из полученной формулы видно, что усилие, необходимое для перекачивания катка, прямо пропорционально его весу и обратно пропорционально радиусу катка.

Коэффициент трения качения определяется опытным путем, его значения для различных условий приводятся в справочниках.

Приведем ориентировочные значения коэффициентов k трения качения для катка по плоскости (см):

Мягкая сталь по мягкой стали	0,005
Закаленная сталь по закаленной стали ...	0,001
Чугун по чугуну	0,005
Дерево по стали	0,03...0,04
Дерево по дереву	0,05...0,08
Резиновая шина по шоссе.....	0,24

Коэффициент трения качения практически не зависит от скорости движения тела.

В ряде случаев при изучении трения качения активные и реактивные силы, действующие на каток, удобно представлять в ином виде (рис. 6.12, а, б).

Разложим полную реакцию R опорной поверхности на составляющие N и $F_{\text{тр}}$, тогда

$$R = N + F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения качения; N — реакция, нормальная к недеформированной опорной плоскости.

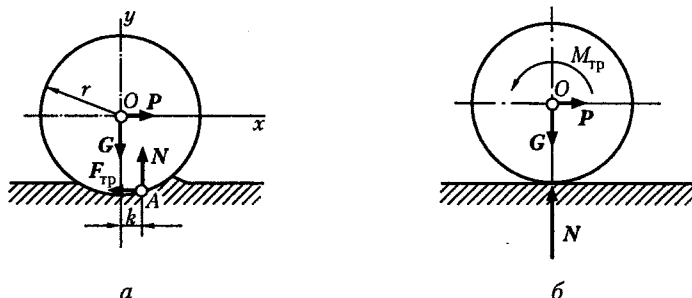


Рис. 6.12

Составим три уравнения равновесия катка:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; P - F_{\text{тр}} = 0; \\ \sum Y &= 0; N - G = 0; \\ \sum M_A &= 0; -Pr + Gk = 0.\end{aligned}$$

Из этих уравнений имеем

$$P = F_{\text{тр}}; N = G; Pr = Gk.$$

Введем обозначения $Pr = M$, $Gk = M_{\text{тр}}$, где M — момент качения, $M_{\text{тр}}$ — момент трения.

Возможны следующие частные случаи движения катка:

- а) $M \geq M_{\text{тр}}$, но $P < F_{\text{тр}}$ — только качение;
- б) $M < M_{\text{тр}}$, но $P > F_{\text{тр}}$ — только скольжение;
- в) $M > M_{\text{тр}}$, но $P > F_{\text{тр}}$ — качение с проскальзыванием;
- г) $M < M_{\text{тр}}$, но $P < F_{\text{тр}}$ — состояние покоя.

Трение качения в большинстве случаев меньше трения скольжения, поэтому вместо подшипников скольжения широко применяют шариковые и роликовые подшипники качения.

На практике нередки случаи сочетания трения скольжения с трением качения, например в зубчатых зацеплениях или игольчатых подшипниках.

6.5. Устойчивость против опрокидывания

Рассмотрим твердое тело весом G , опирающееся на плоскость и способное опрокидываться вокруг какого-то ребра под действием горизонтальной силы P (рис. 6.13). Допустим, что силы P и G лежат в одной плоскости, пересекающейся с ребром в точке A . В момент начала опрокидывания на тело будут действовать также нормальная реакция N_A и сила трения $F_{\text{тр}}$, приложенные в точке A , причем в случае равновесия системы всех четырех сил можно записать два уравнения равновесия:

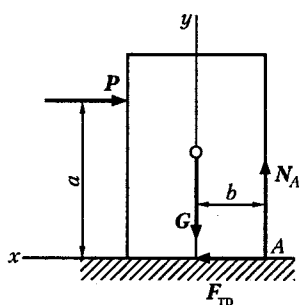


Рис. 6.13

$$\sum Y = 0; N_A - G = 0, \text{ откуда } N_A = G;$$

$$\sum X = 0; F_{\text{тр}} - P = 0, \text{ откуда } P = F_{\text{тр}}.$$

Таким образом, в момент начала опрокидывания на рассматриваемое тело действуют пара сил $(P, F_{\text{тр}})$, стремящаяся опрокинуть тело, и пара сил (G, N_A) , противодействующая опрокидыванию.

Очевидно, что опрокидывания не произойдет, если

$$M(G, N_A) > M(P, F_{тр}) \text{ или } Gb > Pa.$$

Произведение Gb равно моменту силы G относительно точки A и называется моментом устойчивости. Момент силы P относительно той же точки, равный произведению Pa , называется опрокидывающим моментом.

Условие устойчивости против опрокидывания запишется в виде неравенства

$$M_{уст} > M_{опр}$$

и сформулируется так: *для устойчивости твердого тела против опрокидывания необходимо и достаточно, чтобы момент устойчивости был больше опрокидывающего момента.*

Если на тело действуют несколько сил, стремящихся его опрокинуть, то опрокидывающий момент равен сумме моментов этих сил относительно точки, вокруг которой может произойти опрокидывание. То же относится и к моменту устойчивости.

Отношение момента устойчивости к опрокидывающему моменту называется коэффициентом устойчивости:

$$M_{уст} / M_{опр} = k_{уст}.$$

Очевидно, что в сооружениях коэффициент устойчивости $k_{уст}$ должен быть больше единицы.

Расчет на устойчивость особенно важен для высоких сооружений, таких как дымовые трубы, мачты, краны, высокие стены и т.п. Заметим, что в случае, когда $P > F_{тр}$, а опрокидывающий момент меньше момента устойчивости $M_{опр} < M_{уст}$, тело будет скользить по опорной плоскости, конечно, если конструкция допускает такое движение.

Глава 7

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

7.1. Пространственная система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых расположены в различных плоскостях, называется пространственной системой сил.

Пространственная система сил называется сходящейся, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке.

Теорема. *Пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих*

сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

Пусть дана пространственная система n сходящихся сил ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$). На основании следствия из аксиом III и IV перенесем все силы системы вдоль линий действия в точку их пересечения. Затем на основании аксиомы параллелограмма сложим силы F_1 и F_2 , в результате чего получим их равнодействующую:

$$F_{\Sigma 1} = F_1 + F_2.$$

Сложив эту равнодействующую с силой F_3 , получим равнодействующую трех сил:

$$F_{\Sigma 2} = F_{\Sigma 1} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3.$$

Повторив указанную операцию $n - 1$ раз, получим равнодействующую системы n сил, которая будет равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей будет проходить через точку пересечения линий действия составляющих:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n, \text{ или } F_{\Sigma} = \sum F_i.$$

Силовой многоугольник пространственной системы сил не лежит в одной плоскости, поэтому геометрический и графический способы нахождения равнодействующей неприемлемы, а применяется аналитический способ (метод проекций).

7.2. Проекция силы на ось в пространстве

Определение проекции силы на ось остается прежним (см. подразд. 2.3). Если сила и ось не лежат в одной плоскости, то проецирующие перпендикуляры также не лежат в одной плоскости (рис. 7.1).

Для того чтобы определить, чему равна проекция силы F на ось Ox , следует мысленно провести через начало или конец силы ось O_1x_1 , параллельную данной оси Ox , тогда $F_x = F \cos \alpha$, так как $F_x = F_{x_1}$.

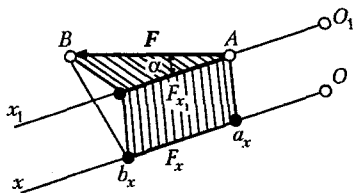


Рис. 7.1

Правило знаков для проекции остается прежним.

Если вектор силы *параллелен* оси, то он проецируется на эту ось в *натуральную величину*.

Если вектор силы *лежит в плоскости, перпендикулярной* оси, то его проекция на эту ось *равна нулю*.

7.3. Разложение силы по трем осям координат

Пусть дана сила F (рис. 7.2). Возьмем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с началом вектора силы F . Из конца этого вектора опустим перпендикуляр на плоскость xy и разложим силу F на составляющие F_{xy} и F_z , а составляющую F_{xy} — на составляющие F_x и F_y . Тогда

$$F = F_x + F_y + F_z.$$

Достроим полученное изображение до параллелепипеда, у которого составяющие F_x , F_y , F_z являются ребрами, а сила F — диагональю.

Из изложенного можно сделать вывод: *равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах.*

Из рис. 7.2 видно, что в случаях разложения силы F по трем взаимно перпендикулярным направлениям x , y , z составляющие F_x , F_y , F_z равны по модулю проекциям силы F на эти оси. Эти проекции обозначим F_x , F_y , F_z .

Зная проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси координат, можно определить модуль и направление вектора силы по формулам:

модуль силы

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

направляющие косинусы

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(F, y) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(F, z) = \frac{F_z}{F}.$$

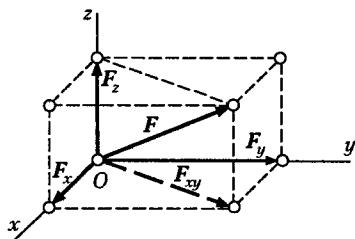


Рис. 7.2

7.4. Аналитический способ определения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил

Дана пространственная система n сходящихся сил. Поместим начало координат в точке пересечения линий их действия и разложим каждую силу данной системы на три взаимно-перпендикулярные составляющие, направленные по осям координат, предварительно перенеся все силы вдоль линий их действия в одну точку.

Вместо данной системы n сходящихся сил мы получим эквивалентную ей систему $3n$ сил, из которых n сил действуют по оси x , n сил — по оси y и n сил — по оси z .

Равнодействующая сил, направленных по оси x , равна их алгебраической сумме; то же можно сказать о силах, направленных по осям y и z . Таким образом, систему $3n$ сил заменим эквивалентной ей системой трех сил.

Проекции силы на три взаимно-перпендикулярные оси и составляющие силы, направленные по этим осям, равны по модулю, следовательно, проекции равнодействующей равны

$$F_{\Sigma x} = \sum X; F_{\Sigma y} = \sum Y; F_{\Sigma z} = \sum Z.$$

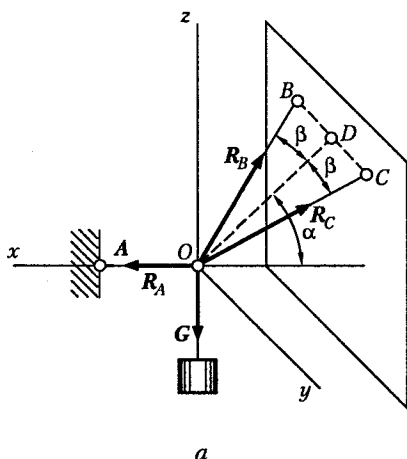
Равнодействующая трех взаимно-перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, и по известным проекциям равнодействующей можно определить модуль и направление вектора равнодействующей (см. подразд. 7.3).

7.5. Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил

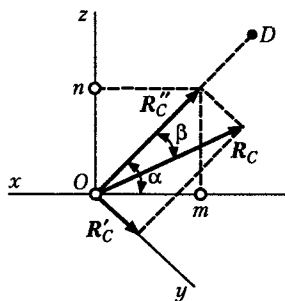
Известно, что пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей. Если такая система находится в равновесии, т.е. эквивалентна нулю, то равнодействующая этой системы равна нулю, а следовательно, и проекции равнодействующей равны нулю, причем эти проекции равны сумме проекций составляющих.

Отсюда вытекают условия равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0.$$



a



b

Рис. 7.3

Эти условия формулируются следующим образом: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

Пример 7.1. Груз весом $G = 200$ Н удерживается в равновесии горизонтальной веревкой AO и двумя веревками BO и CO , плоскость которых наклонена к горизонтальной плоскости под углом $\alpha = 45^\circ$ и образует с вертикальной плоскостью, проходящей через AO , прямой угол (рис. 7.3, а). Веревки BO и CO образуют с этой вертикальной плоскостью углы $\beta = 30^\circ$. Определить натяжение веревок.

Решение. Рассмотрим равновесие узла O , к которому приложены четыре силы: G, R_A, R_B, R_C . К пространственной системе четырех сходящихся сил применим аналитические условия равновесия и составим три уравнения равновесия:

$$1) \sum Y = 0; R_C \sin \beta - R_B \sin \beta = 0, \text{ откуда}$$

$$R_C = R_B.$$

Так как углы между реакциями R_B, R_C и осями координат x и z неизвестны, то для удобства проецирования каждую из этих сил разложим на две составляющие, как показано на рис. 7.3, б. Тогда

$$R_{C_x} = Om = R_C'' \cos \alpha = R_C \cos \beta \cos \alpha;$$

$$R_{C_z} = On = R_C'' \sin \alpha = R_C \cos \beta \sin \alpha.$$

Проекция составляющей R_C' на оси x и z равны нулю, так как эта составляющая перпендикулярна указанным осям;

$$2) \sum Z = 0; R_C \cos \beta \sin \alpha + R_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

Учитывая, что $R_B = R_C$, получаем

$$R_B = R_C = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{200}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 163 \text{ Н};$$

$$3) \sum X = 0; R_A - R_C \cos \beta \cos \alpha - R_B \cos \beta \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$R_A = 2 R_B \cos \beta \cos \alpha = \frac{2 G \cos \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin \alpha} = G = 200 \text{ Н}.$$

7.6. Момент силы относительно оси

Рассмотрим колесо червячной передачи, укрепленное на валу, вращающемся в подшипниках (рис. 7.4). Червяк передает червячному колесу силу F , не лежащую в плоскости, перпендикулярной оси.

Разложим силу F на три взаимно-перпендикулярные составляющие F_1, F_2 и F_3 . Составляющую F_1 назовем окружной силой, составляющую F_2 — осевой силой, а составляющую F_3 — радиальной силой.

Составляющая F_1 вызывает вращательное действие, которое измеряется произведением $F_1 r$; составляющая F_2 стремится сдвинуть колесо вдоль оси; составляющая F_3 стремится изогнуть ось колеса, а вращательное действие этих сил относительно оси равно нулю.

Таким образом, если нужно найти момент силы относительно оси, то следует принимать в расчет только составляющую F_1 , лежащую в плоскости, перпендикулярной оси, и не пересекающую ось.

Ранее было установлено, что проекция вектора силы на ось есть скалярная алгебраическая величина. В отличие от проекции на ось проекция силы на плоскость есть величина векторная, так как эта проекция характеризуется не только числовым значением, но и положением на плоскости, т.е. направлением. Поэтому моменту силы относительно оси можно дать такое определение: *моментом силы относительно оси называется величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

Это определение поясняет рис. 7.5. Момент силы относительно оси условимся записывать следующим образом:

$$M_z(\mathbf{F}) = F_n a.$$

Условимся считать момент силы положительным, если смотреть с положительного конца оси и сила стремится вызвать вращение против часовой стрелки, момент силы считаем отрицательным, если она стремится вызвать вращение по часовой стрелке.

Момент силы относительно оси не меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия.

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях (не считая случаев, когда сила равна нулю или действует вдоль оси):

- 1) если вектор силы параллелен оси, так как при этом проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси, равна нулю (см. рис. 7.5, сила F_2);
- 2) если линия действия силы пересекает ось, так как при этом плечо равно нулю (см. рис. 7.4, сила F_3).

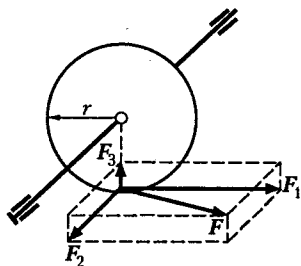


Рис. 7.4

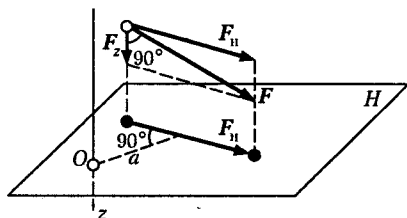


Рис. 7.5

7.7. Аналитические условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил

Строгое обоснование условий равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил требует знания некоторых вопросов, не предусматриваемых программами учреждений среднего профессионального образования, поэтому примем эти условия без доказательства.

Для равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на каждую из трех осей координат была равна нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из этих осей была равна нулю.

Запишем условия равновесия:

$$\sum X = 0; \sum M_x(F_i) = 0;$$

$$\sum Y = 0; \sum M_y(F_i) = 0;$$

$$\sum Z = 0; \sum M_z(F_i) = 0.$$

Поясним смысл этих условий, для чего применим три условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M(F_i) = 0.$$

Тело, лежащее на плоскости, имеет три степени свободы, а именно: возможность перемещения в направлениях двух взаимно-перпендикулярных осей, лежащих в этой плоскости, и возможность вращения вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Если к телу приложена плоская система сил и выполнено условие $\sum X = 0$, то тело не будет перемещаться в направлении оси x , так как равнодействующая системы не имеет составляющей, параллельной оси x . Если выполнено условие $\sum Y = 0$, то тело не будет перемещаться и в направлении оси y , так как равнодействующая системы не имеет составляющей, параллельной оси y . Наконец, если выполнено условие $\sum M(F_i) = 0$, т.е. сумма моментов относительно любой точки плоскости равна нулю, то тело не будет под действием этой системы сил вращаться, так как нет пары сил, которая может осуществить это вращение.

Таким образом, *трем степеням свободы тела на плоскости соответствуют три условия равновесия.*

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, а именно: возможность перемещаться в направлениях трех взаимно перпендикулярных осей координат и возможность вращаться вокруг этих осей. Таким образом, *шести степеням свободы тела в пространстве соответствуют шесть условий равновесия.*

Если система сил, приложенная к свободному телу, удовлетворяет всем шести условиям равновесия, то возможность трех перемещений и трех вращений под действием этой системы исключена и тело будет находиться в равновесии.

Нетрудно показать, что все выведенные выше условия равновесия для различных систем сил являются частными случаями условий равновесия, рассмотренных здесь.

В случае, если на свободное тело действует пространственная система параллельных сил (например, параллельных оси z), то условия равновесия этой системы следующие:

$$\sum Z = 0; \sum M_x(F_i) = 0; \sum M_y(F_i) = 0.$$

Остальные три условия равновесия будут представлять собой тождества, так как проекции всех сил такой системы на оси x и y равны нулю и моменты всех сил относительно оси z также равны нулю.

Так как условия равновесия пространственной системы сил справедливы для любых прямоугольных осей координат, то при решении данной задачи систему координат можно изменять, т.е. часть условий равновесия составить для одних осей координат, а часть — для измененных.

Кроме того, можно одно, два или все три уравнения проекций сил заменить уравнениями моментов сил относительно новых осей координат (см. пример 7.2). В некоторых случаях такие приемы упрощают решение задач.

При решении задач уравнения моментов сил относительно осей в общем виде будем записывать упрощенно:

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0.$$

Пример 7.2. На горизонтальном валу AB (рис. 7.6) насажены зубчатое колесо 1 диаметром $D = 2$ м и шестерня 2 диаметром $d = 20$ см. Остальные размеры указаны на рисунке. К колесу 1 по касательной приложена горизонтальная сила $P = 100$ Н, а к шестерне 2 также по касательной приложена вертикальная сила Q . Определить силу Q и реакции подшипников A и B в положении равновесия. Массой деталей пренебречь.

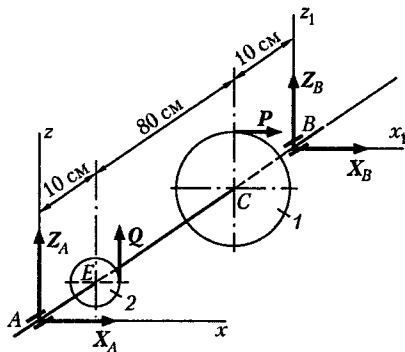


Рис. 7.6

Решение. Отбросим подшипники и рассмотрим равновесие вала с зубчатым колесом и шестерней. Реакции подшипников A и B перпендикулярны оси вала. Поэтому разложим каждую из этих реакций на две взаимно-перпендикулярные составляющие, параллельные осям координат x и z . В результате полу-

чена приложенная к заданной системе тел пространственная система шести сил, пять из которых, т.е. X_A, Z_A, X_B, Z_B, Q , не известны по модулю.

Применим условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил и составим пять уравнений равновесия:

$$1) \sum M_y = 0; -Qd/2 + PD/2 = 0.$$

Из этого уравнения

$$Q = PD/d = 100 \cdot 2/0,2 = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН};$$

$$2) \sum M_z = 0; -X_B \cdot AB - P \cdot AC = 0.$$

Из этого уравнения

$$X_B = -P \cdot AC/AB = -100 \cdot 0,9/1,0 = -90 \text{ Н};$$

$$3) \sum M_x = 0; Q \cdot AE + Z_B \cdot AB = 0.$$

Из этого уравнения

$$Z_B = -Q \cdot AE/AB = -1000 \cdot 0,1/1,0 = -100 \text{ Н};$$

$$4) \sum X = 0; X_A + P + X_B = 0.$$

Из этого уравнения

$$X_A = -P - X_B = -100 - (-90) = -10 \text{ Н};$$

$$5) \sum Z = 0; Z_A + Q + Z_B = 0.$$

Из этого уравнения

$$Z_A = -Q - Z_B = -1000 - (-100) = -900 \text{ Н}.$$

Знак «-» перед значениями реакций X_A, X_B, Z_A и Z_B показывает, что эти реакции направлены противоположно указанным на рисунке.

Шестое условие равновесия $\sum Y = 0$ обращается в тождество, так как проекции на ось y всех сил рассматриваемой системы равны нулю.

Для проверки решения составим дополнительное, контрольное, уравнение моментов относительно оси x_1 , проходящей через точку B :

$$\sum M_{x_1} = 0; -Z_A \cdot AB - Q \cdot BE = 0.$$

Подставив значения, получим $900 \cdot 1,0 - 1000 \cdot 0,9 = 0$.

Контрольное уравнение обращается в тождество, что свидетельствует о правильности полученных ответов.

На этом примере покажем возможность изменения при решении системы координатных осей и замены уравнения проекций уравнением моментов.

Определим реакцию X_A , составив вместо уравнения проекций сил на ось x уравнение моментов сил относительно новой оси z_1 , проходящей через точку B :

$$\sum M_{z_1} = 0; X_A \cdot AB + P \cdot CB = 0.$$

Из этого уравнения

$$X_A = -P \cdot CB/AB = -100 \cdot 0,1/1,0 = -10 \text{ Н}.$$

Как видим, ответ получен тот же.

7.8. Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона)

Теорема. Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

Пусть даны пространственная система n произвольно расположенных сил, приложенных к телу, и равнодействующая этой системы F_{Σ} (рис. 7.7):

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \equiv F_{\Sigma}.$$

Приложим к телу другую систему сил, равнодействующая которой F'_{Σ} по модулю равна силе F_{Σ} и направлена по той же линии действия в противоположную сторону.

Сила F'_{Σ} для данной системы является уравнивающей силой и вместе с данными силами образует уравновешенную систему:

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F'_{\Sigma}) \equiv 0,$$

также

$$(F_{\Sigma}, F'_{\Sigma}) \equiv 0.$$

Так как обе записанные выше системы эквивалентны нулю, т. е. уравновешены, то к ним можно применить любое условие равновесия, например

$$\sum M_x(F_i) = 0.$$

Запишем это условие для обеих систем:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0;$$

$$M_x(F_{\Sigma}) + M_x(F'_{\Sigma}) = 0.$$

Так как правые части этих равенств равны, то будут равны и левые:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots$$

$$\dots + M_x(F_n) = M_x(F_{\Sigma}),$$

поскольку члены $M_x(F'_{\Sigma})$ взаимно уничтожились.

Итак,

$$\sum M_x(F_i) = M_x(F_{\Sigma});$$

теорема доказана.

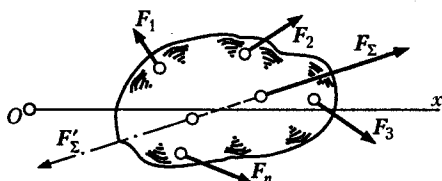


Рис. 7.7

Глава 8

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

8.1. Центр параллельных сил

Центром параллельных сил называется такая точка на линии действия равнодействующей системы параллельных сил, через которую проходит равнодействующая и в том случае, если все силы системы повернуть вокруг их точек приложения на один и тот же угол, сохраняя параллельность сил.

Покажем существование центра параллельных сил на системе двух сил F_1 и F_2 (рис. 8.1). На основании теоремы о сложении двух параллельных сил, направленных в одну сторону, определим равнодействующую этих сил и положение линии ее действия по формулам

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; F_1/F_2 = BC/AC.$$

Нетрудно увидеть, что точка C , лежащая на линии AB , соединяющей точки приложения данных сил, является центром двух параллельных сил F_1 и F_2 , так как при повороте их на один и тот же угол α отношение плеч BC и CA не изменится и равнодействующая также пройдет через точку C .

Если дана система n параллельных сил, то равнодействующую этой системы можно найти, последовательно попарно складывая все силы. На линии действия равнодействующей системы параллельных сил также будет существовать точка, обладающая свойством центра параллельных сил. Выведем формулы для определения координат центра системы n параллельных сил.

Пусть даны пространственная система n параллельных сил и равнодействующая этой системы. Выберем систему осей координат и обозначим координаты точек приложения сил данной системы и координаты точки приложения равнодействующей (рис. 8.2).

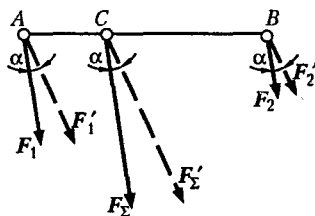


Рис. 8.1

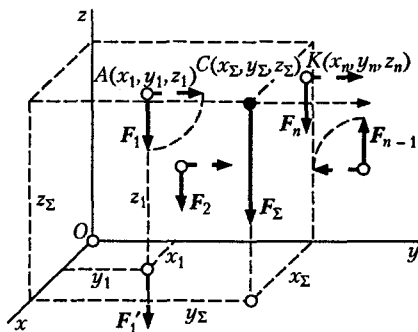


Рис. 8.2

Запишем моменты сил данной системы относительно оси y . Для того чтобы легче представить, чему равен момент силы относительно оси, следует мысленно перенести силу вдоль линии действия до положения, когда точка приложения силы окажется в плоскости координатных осей (см. рис. 8.2, сила F_1):

$$M_y(F_1) = F_1 x_1,$$

$$M_y(F_2) = F_2 x_2,$$

.....

.....

$$M_y(F_n) = F_n x_n,$$

$$M_y(F_\Sigma) = F_\Sigma x_C.$$

Применим доказанную в подразд. 7.8 теорему о моменте равнодействующей относительно оси. Тогда

$$F_\Sigma x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n,$$

откуда

$$x_C = (F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n) / F_\Sigma.$$

Записав моменты сил относительно оси x и вновь применив теорему о моменте равнодействующей, получим

$$y_C = (F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots + F_n y_n) / F_\Sigma.$$

Для определения координаты z_C повернем все силы системы вокруг их точек приложения в одну сторону так, чтобы силы стали параллельны оси y . При этом точка C не изменит своего положения, так как она является центром параллельных сил данной системы.

Запишем моменты всех сил относительно оси x и применим теорему о моменте равнодействующей, в результате чего получим

$$z_C = (F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \dots + F_n z_n) / F_\Sigma.$$

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме, т.е. $F_\Sigma = \sum F_i$. Применив сокращенную форму записи, получим формулы для определения координат центра параллельных сил в следующем виде:

$$x_C = \sum (F_i x_i) / \sum F_i; \quad y_C = \sum (F_i y_i) / \sum F_i; \quad z_C = \sum (F_i z_i) / \sum F_i.$$

Заметим, что в полученных формулах силы и моменты сил берут со знаком согласно ранее установленным правилам.

8.2. Определение положения центра тяжести

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести.

Элементарной частицей тела называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки. Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, с достаточной степенью точности можно считать эти силы системой параллельных сил.

Центром тяжести тела называется центр параллельных сил тяжести всех элементарных частиц тела.

Центр тяжести есть геометрическая точка, которая может лежать вне тела (например, кольцо, цилиндр с отверстием). Центр тяжести будем обозначать точкой C .

Координаты центра тяжести тела находят по тем же формулам, что и координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \sum (G_i x_i) / \sum G_i; \quad y_c = \sum (G_i y_i) / \sum G_i; \quad z_c = \sum (G_i z_i) / \sum G_i,$$

где G_i — сила тяжести каждой элементарной частицы тела; x_i, y_i, z_i — координаты частицы; $\sum G_i$ — сила тяжести всего тела.

В случае однородных тел по таким же формулам можно определять координаты центра тяжести объемов, площадей и линий. Например, для абсциссы x_c получим следующие формулы:

1) сила тяжести элементарной частицы, выраженная через ее объем V_i , равна

$$G_i = \gamma V_i,$$

где γ — удельная сила тяжести (для однородного тела — величина постоянная). Тогда

$$x_c = \sum (G_i x_i) / \sum G_i = \gamma \sum (V_i x_i) / (\gamma \sum V_i),$$

следовательно, для объема

$$x_c = \sum (V_i x_i) / \sum V_i;$$

2) если тело представляет собой однородную пластинку толщиной h , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через площадь A_i , равна

$$G_i = \gamma h A_i,$$

тогда

$$x_c = \sum (G_i x_i) / \sum G_i = \gamma h \sum (A_i x_i) / (\gamma h \sum A_i),$$

следовательно, для площади

$$x_c = \sum (A_i x_i) / \sum A_i;$$

3) если тело представляет собой однородную проволоку постоянного поперечного сечения A , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через длину l_i , равна

$$G_i = \gamma A l_i,$$

тогда

$$x_c = \sum (G_i x_i) / \sum G_i = \gamma A \sum (l_i x_i) / (\gamma A \sum l_i),$$

следовательно, для линии

$$x_c = \sum (l_i x_i) / \sum l_i.$$

8.3. Методы нахождения центра тяжести

Рассмотрим три метода нахождения центра тяжести: метод симметрии, метод разбиения и метод отрицательных масс.

Метод симметрии. Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси x и z лежали в плоскости симметрии (рис. 8.3).

В этом случае каждой элементарной частице силой тяжести G_i с абсциссой $y_i = +a$ соответствует такая же элементарная частица с абсциссой $y_i = -a$, тогда

$$y_c = \sum (G_i x_i) / \sum G_i = 0.$$

Отсюда следует вывод: *если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.*

Аналогично можно доказать и следующие положения:

если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси;

если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке их пересечения;

центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

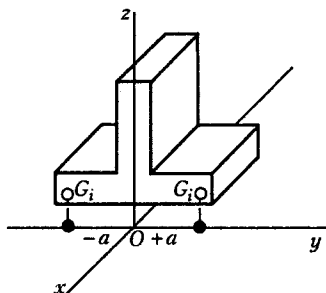


Рис. 8.3

Метод разбиения. Этот метод заключается в том, что тело разбивают на наименьшее число частей, силы тяжести и положение центров тяжести которых известны, после чего применяют приведенные ранее формулы.

Допустим, что мы разбили тело силой тяжести G на три части G', G'', G''' , абсциссы центров тяжести этих частей x'_c, x''_c, x'''_c известны. Формула для определения абсциссы центра тяжести всего тела

$$x_c = \sum (G_i x_i) / \sum G_i.$$

Перепишем ее в следующем виде:

$$x_c \sum G_i = \sum (G_i x_i) \\ \text{или } Gx_c = \sum (G_i x_i).$$

Последнее равенство запишем для каждой из трех частей тела отдельно:

$$G'x'_c = \sum (G'_i x'_i); \quad G''x''_c = \sum (G''_i x''_i); \\ G'''x'''_c = \sum (G'''_i x'''_i).$$

Сложив правые и левые части этих трех равенств, получим

$$G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c = \\ = \sum (G'_i x'_i) + \sum (G''_i x''_i) + \sum (G'''_i x'''_i) = \sum (G_i x_i).$$

Но правая часть последнего равенства представляет собой произведение Gx_c , так как

$$Gx_c = \sum (G_i x_i),$$

следовательно,

$$x_c = (G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c) / G,$$

что и требовалось доказать. Аналогично,

$$y_c = (G'y'_c + G''y''_c + G'''y'''_c) / G; \\ z_c = (G'z'_c + G''z''_c + G'''z'''_c) / G.$$

Полученные формулы аналогичны формулам для определения координат центров тяжести, выведенным в подразд. 8.2. Поэтому в исходные формулы можно подставлять не силы тяжести элементарных частиц G_i , а силы тяжести конечных частей; под координатами x_i, y_i, z_i понимают координаты центров тяжести частей, на которые тело разбито.

Метод отрицательных масс. Этот метод заключается в том, что тело, имеющее свободные полости, считают сплошным, а массу свободных полостей — отрицательной. Вид формул для определения координат центра тяжести тела при этом не меняется.

Таким образом, при определении центра тяжести тела, имеющего свободные полости, следует применять метод разбиения, но считать массу свободных полостей отрицательной.

8.4. Положение центра тяжести некоторых фигур

Прямоугольник. Так как прямоугольник имеет две оси симметрии, то центр тяжести его площади находится в точке пересечения этих осей, иначе говоря, в *точке пересечения диагоналей* прямоугольника.

Треугольник. Пусть дан треугольник ABD (рис. 8.4). Разобьем его на элементарные (бесконечно узкие) полоски, параллельные стороне AD . Центр тяжести каждой полоски будет лежать на медиане Bd , следовательно, на этой медиане будет лежать центр тяжести всей площади треугольника. Разбив треугольник на элементарные полоски, параллельные стороне AB , увидим, что искомый центр тяжести лежит и на медиане aD , следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит в точке пересечения его медиан. Из геометрии известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в соотношении 1:2 от основания. Из подобия треугольников CNd и BMd получим

$$CN = h / 3.$$

Следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит на расстоянии *одной трети высоты от каждого основания*.

Дуга окружности. Возьмем дугу AB окружности радиусом R с центральным углом 2α (рис. 8.5). Систему координат выберем так, чтобы начало координат было в центре окружности, а ось x делила дугу пополам, тогда $y_C = 0$ вследствие симметрии дуги относительно оси x . Определим x_C .

Разобьем дугу AB на элементарные части l_i , одна из которых изображена на рисунке. Тогда, согласно подразд. 8.2,

$$x_C = \sum (l_i x_{Ci}) / \sum l_i.$$

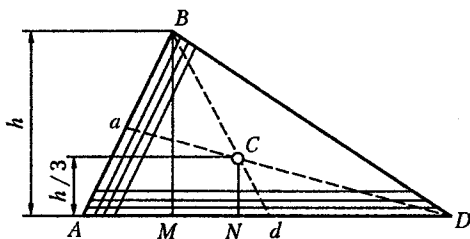


Рис. 8.4

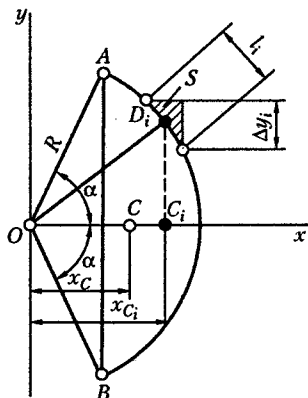


Рис. 8.5

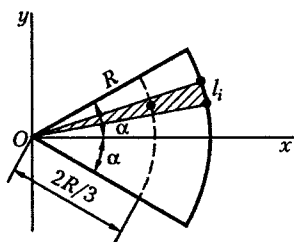


Рис. 8.6

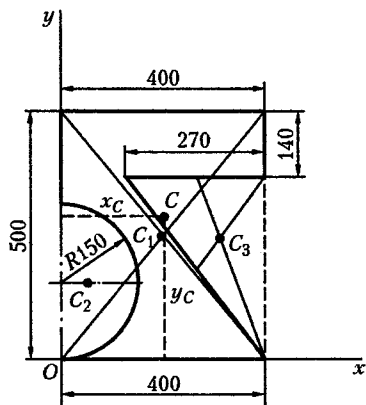


Рис. 8.7

Дугу l_i вследствие малости примем за отрезок прямой. Из подобия $\triangle O D_i C_i$ и элементарного $\triangle S$ (на рисунке заштрихован) получим

$$l_i / \Delta y_i = R / x_{C_i} \text{ или } l_i x_{C_i} = R \Delta y_i.$$

Тогда

$$x_C = \sum (l_i x_{C_i}) / \sum l_i = \sum (R \Delta y_i) / l = R \sum \Delta y_i / l = R \cdot AB / l,$$

так как $\sum \Delta y_i = AB$, а $\sum l_i = l$ — длина дуги AB . Но $AB = 2R \sin \alpha$, а $l = 2R \alpha$, следовательно,

$$x_C = (R \sin \alpha) / \alpha.$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полуокружность)

$$x_C = 2R / \pi.$$

Круговой сектор. Возьмем сектор радиусом R с центральным углом 2α (рис. 8.6). Проведем оси координат, как показано на рисунке, тогда $y_C = 0$. Определим x_C , для чего разобьем сектор на ряд элементарных секторов, каждый из которых вследствие малости дуги l_i примем за равнобедренный треугольник с высотой R . Тогда центр тяжести каждого элементарного сектора будет лежать на дуге радиуса $2R/3$ и задача определения центра тяжести сектора сведется к определению центра тяжести дуги окружности радиуса $2R/3$, следовательно,

$$x_C = 2R \sin \alpha / (3\alpha).$$

При $\alpha = \pi/2$ рад (полукруг)

$$x_C = 4R / (3\pi).$$

Пример 8.1. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластинки, форма и размеры в миллиметрах которой показаны на рис. 8.7.

Решение. Выберем оси координат, как показано на рис. 8.7. Представим себе заданную фигуру состоящей из трех частей: прямоугольника 400×500 мм, полукруга и треугольника, причем площади двух последних частей будем считать отрицательными. Тогда

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}; \quad y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

где

$$A_1 = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ см}^2; \quad x_1 = 20 \text{ см};$$

$$A_2 = -(\pi/2) \cdot 15^2 = -353 \text{ см}^2; \quad x_2 = (4 \cdot 15) / (3\pi) = 6,37 \text{ см};$$

$$A_3 = -(1/2) \cdot 27 \cdot 36 = -486 \text{ см}^2; \quad x_3 = 13 + (2/3) \cdot 27 = 31 \text{ см};$$

$$y_1 = 25 \text{ см}; \quad y_2 = 15 \text{ см}; \quad y_3 = (2/3) \cdot 36 = 24 \text{ см}.$$

Подставив значения и произведя вычисления, получим

$$x_C = 19,5 \text{ см}; \quad y_C = 28,4 \text{ см}.$$

Пример 8.2. Определить положение центра тяжести сечения, составленного из двутавра № 22 и швеллера № 20, как показано на рис. 8.8.

Решение. Из курса инженерной графики известно, что номер профиля проката соответствует наибольшему габаритному размеру его сечения, выраженному в сантиметрах.

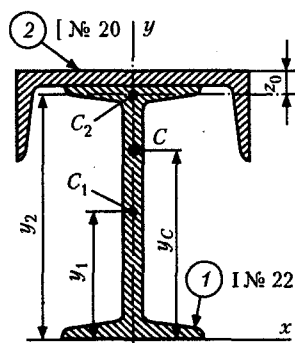
Так как сечение, составленное из двутавра и швеллера, представляет собой фигуру, симметричную относительно оси y , то центр тяжести такого сечения лежит на этой оси, т.е. $x_C = 0$. По справочнику [7] определим площади и координаты центров тяжести двутавра 1 и швеллера 2.

Для двутаврового сечения

$$A_1 = 15,2 \text{ см}^2; \quad y_1 = 22/2 = 11 \text{ см};$$

для швеллерного сечения

$$A_2 = 12 \text{ см}^2; \quad y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0,32 - 1,25 = 21,07 \text{ см},$$



где d — толщина стенки швеллера; z_0 — размер, определяющий положение центра тяжести швеллера.

Применим формулу для определения ординаты центра тяжести всего сечения

$$y_C = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i},$$

тогда

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{15,2 \cdot 11 + 12 \cdot 21,07}{15,2 + 12} = 15,4 \text{ см}.$$

Рис. 8.8

Раздел второй

КИНЕМАТИКА

Глава 9

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

9.1. Основные понятия кинематики и некоторые сведения из теории относительности

Кинематика — часть теоретической механики, в которой изучаются движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил.

Когда в механике говорят о движении тела, то подразумевают под этим изменение с течением времени его положения в пространстве по отношению к другим телам. Обычно с телом, по отношению к которому изучают движение, связывают какую-нибудь систему координат, которую вместе с выбранным способом измерения времени называют **системой отсчета**. Если координаты всех точек тела в выбранной системе отсчета остаются все время неизменными, то тело находится в покое. Если рассматривается движение тела по отношению к условно неподвижной системе отсчета, то движение называют **абсолютным**; движение тела по отношению к подвижной системе отсчета называют **относительным**. В мире все находится в непрерывном движении, поэтому все движения являются относительными, однако условно можно представить себе и абсолютное движение, например движение по отношению к Земле.

Итак, движение тел совершается в пространстве с течением времени. Пространство и время, как и движение, согласно учению диалектического материализма, суть формы существования материи.

Классическая механика полагает, что пространство и время имеют абсолютный, независимый друг от друга характер и что их свойства не зависят от распределения и движения материи.

К началу XX в. значительно расширились познания людей о свойствах материи, в результате чего возникли новые представления о формах существования материи, а в 1905–1916 гг. Альбертом Эйнштейном (1879–1955) была создана теория относительности.

Теория относительности — это современная физическая теория пространства и времени; с ней тесно связаны такие понятия, как движение, масса, энергия и др. В основу теории относительности положен принцип постоянства скорости света, согласно которому скорость света в вакууме постоянна и не зависит от скорости источника света. Теория относительности, к настоящему времени

подтвержденная громадным количеством опытных фактов и применяющаяся на практике, устанавливает, что пространство и время связаны между собой в единую пространственно-временную форму существования материи, имеющую абсолютный характер, не зависящую от системы отсчета; пространство и время в отдельности являются понятиями относительными, зависящими от системы отсчета, например от скорости ее движения.

Таким образом, в теории относительности понятия длины тела и промежутка времени являются понятиями относительными, зависящими от скорости движения тела. Эти зависимости выражаются следующими формулами:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}; \quad t = t_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2},$$

где l — продольный размер движущегося тела; l_0 — продольный размер покоящегося тела; v — скорость движения тела; c — скорость света в вакууме (300 000 км/с); t — промежуток времени при движении по земным часам; t_0 — промежуток времени в покое.

Итак, у движущегося тела продольные размеры сокращаются, а промежутки времени между двумя событиями удлиняются, т.е. происходит замедление времени.

Из теории относительности следует, что на Земле и на космической ракете время течет по-разному, т.е. ход любых часов и протекание любых биологических процессов на ракете происходит медленнее, чем на Земле.

В 1958 г. немецкий физик Р. Л. Мёссбауэр открыл способ изготовления «ядерных часов», отмеряющих время с погрешностью 10^{-12} с. В 1964 г. профессор А. Туликов (МГУ) открыл новое физическое явление, названное «эффект теней». Если до этого открытия экспериментаторы умели измерять время с погрешностью от 10^{-12} до 10^{-13} с, то с помощью «эффекта теней» можно измерять время с погрешностью до 10^{-18} с. Опыты показали, что при быстром движении ход «ядерных часов» несколько замедляется.

Несмотря на возникновение теории относительности, классическая механика не потеряла своего значения, так как при скоростях движения, далеких от скорости света, результаты, даваемые классической механикой, мало отличаются от результатов механики теории относительности и вполне пригодны для практики. Классическая механика является частным (предельным) случаем механики теории относительности.

9.2. Некоторые определения теории механизмов и машин

При дальнейшем изучении предмета теоретической механики, в особенности при решении задач, мы столкнемся с новыми поня-

тиями, относящимися к науке, которая называется теорией механизмов и машин.

Теория механизмов и машин занимается приложением законов теоретической механики к механизмам и машинам.

Теория механизмов и машин как наука возникла сравнительно недавно, в XVIII в. Этот и последующий век ознаменовались многими замечательными изобретениями, как, например, паровая машина, паровоз, двигатель внутреннего сгорания, самолет. Широкое применение механизмов и машин в практической деятельности людей привело к необходимости создания новой науки. Основоположителем русской школы теории механизмов и машин был П. Л. Чебышев (1821–1894).

Ознакомимся с основными определениями теории механизмов и машин.

Механизмом называется совокупность связанных между собой тел, имеющих определенные движения. Механизмы служат для передачи или преобразования движения.

Машина есть механизм или сочетание механизмов, осуществляющих определенные целесообразные движения для преобразования энергии (энергетические машины), изменения формы, свойств, состояния и положения предмета труда (рабочие машины) или для сбора, переработки и использования информации (информационные машины).

Таким образом, всякая машина состоит из одного или нескольких механизмов, но не всякий механизм является машиной.

Работа механизма или машины обязательно сопровождается тем или иным движением ее органов. Это основной фактор, отличающий механизмы и машины от сооружений — мостов, зданий и т. д.

Простейшей частью механизма является звено. Звено — это одно тело или неизменяемое сочетание тел.

Два звена, соединенные между собой и допускающие относительное движение, называются кинематической парой. Кинематические пары бывают низшие и высшие. Звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары), звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам (зубчатые пары, подшипники качения).

Совокупность кинематических пар называется кинематической цепью. Кинематические пары и цепи могут быть плоскими и пространственными.

Механизм получается из кинематической цепи путем закрепления одного из звеньев. Это неподвижное звено называется станиной или стойкой.

Звено, вращающееся вокруг неподвижной оси, называется кривошипом. Звено, качающееся вокруг неподвижной оси, называется балансиром или коромыслом. Звено, совершаю-

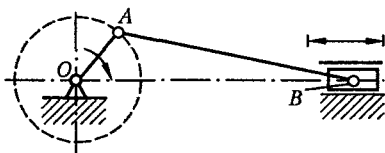


Рис. 9.1

шее сложное движение параллельно какой-то плоскости, называется шатуном. Звено, движущееся возвратно-поступательно по станине, называется ползуном. Подвижное звено, выполненное, например, в виде рейки с пазом и совершающее вращательное или

иное движение, называется кулисой, в пазу скользит камень кулисы.

Звено, которому извне сообщается определенное движение, называется ведущим. Остальные подвижные звенья называются ведомыми.

Различные звенья и кинематические пары механизмов имеют свои условные стандартные обозначения, которые и применяются в этой книге.

В качестве примера рассмотрим широко распространенный кривошипно-ползунный механизм, схематически изображенный на рис. 9.1.

Этот механизм служит для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное (например, в компрессорах, поршневых насосах, эксцентриковых и кривошипных прессах) или, наоборот, для преобразования возвратно-поступательного движения во вращательное (например, в паровых машинах, двигателях внутреннего сгорания).

Кривошипно-ползунный механизм состоит из четырех звеньев: кривошипа OA , шатуна AB , ползуна B , станины и четырех кинематических пар: вращательной пары станина—кривошип, вращательной пары кривошип—шатун, вращательной пары шатун—ползун и поступательной пары ползун—станина.

Кривошипно-ползунный механизм — плоский, его ведущим звеном является либо кривошип, либо ползун.

9.3. Способы задания движения точки

Знание законов движения тела означает знание законов движения каждой его точки, поэтому изучение кинематики начнем с изучения движения геометрической точки.

Траекторией точки называется множество (геометрическое место) положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета.

В зависимости от формы траектории движение точки бывает двух видов: прямолинейное и криволинейное. Рассмотрим два способа задания движения точки: естественный и координатный.

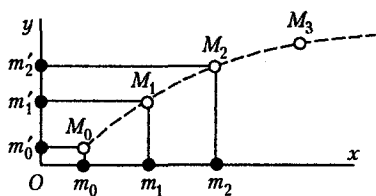


Рис. 9.2

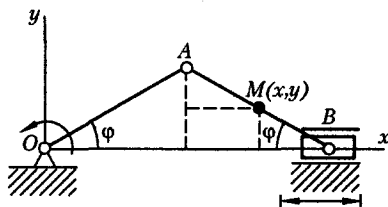


Рис. 9.3

Естественный способ заключается в том, что движение точки задается ее траекторией, началом отсчета и уравнением движения по этой траектории (законом движения).

Уравнение движения в общем виде записывается следующим образом:

$$s = f(t),$$

где s — расстояние точки от начального положения, являющееся функцией времени; t — время движения точки от начального момента.

Зная траекторию точки и уравнение движения по этой траектории, можно определить положение точки в любой момент времени, для чего следует в равенство $s = f(t)$ подставить время.

При своем движении точка проходит некоторый путь, также являющийся функцией времени. Следует подчеркнуть, что *путь, пройденный точкой, совпадает с расстоянием от начала отсчета лишь тогда, когда точка все время движется в одном направлении и начало ее движения совпадает с началом отсчета.*

Координатный способ заключается в том, что движение точки задается движением ее проекций вдоль осей координат.

Уравнения плоского движения точки в координатной форме записываются следующим образом:

$$x = f(t); \quad y = f_1(t).$$

Зная уравнения движения точки в координатной форме, можно, подставив в эти уравнения время, определить положение проекций точки, а следовательно, и самой точки в любой момент времени (рис. 9.2).

Для того чтобы при координатном способе задания движения точки определить уравнение траектории $y = f(t)$, необходимо из уравнений движения исключить время.

Международная система единиц (СИ) устанавливает в качестве единицы длины метр (м), а в качестве единицы времени — секунду (с).

Пример 9.1. Кривошип OA вращается около неподвижной оси так, что угол $\varphi = 10t$ рад. Длина $OA = AB = 0,8$ м. Найти уравнения движения и тра-

екторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B , если в начальный момент ползун находится в крайнем положении; оси координат указаны на рис. 9.3.

Решение. Определим координаты точки M в зависимости от угла φ :

$$x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,4 \cos \varphi = 1,2 \cos \varphi;$$

$$y_M = MB \sin \varphi = 0,4 \sin \varphi.$$

Таким образом, уравнения движения точки M запишутся так:

$$x_M = 1,2 \cos 10t; \quad y_M = 0,4 \sin 10t.$$

Чтобы определить уравнение траектории точки M , исключим из уравнений движения время. Преобразуем уравнения движения и возведем их в квадрат:

$$x_M^2 / 1,2^2 = \cos^2 10t; \quad y_M^2 / 0,4^2 = \sin^2 10t.$$

Сложив правые и левые части этих равенств, получим уравнение траектории точки M :

$$x_M^2 / 1,2^2 + y_M^2 / 0,4^2 = 1.$$

Точка M движется по эллипсу с полуосями длиной 1,2 и 0,4 м. Так как ползун B движется прямолинейно вдоль оси x , то $y_B = 0$.

Для получения уравнения движения ползуна определим абсциссу точки B в зависимости от угла φ :

$$x_B = OA \cos \varphi + AB \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,8 \cos \varphi = 1,6 \cos \varphi.$$

Тогда уравнение движения ползуна запишется так:

$$x_B = 1,6 \cos 10t \text{ [м]}.$$

Пример 9.2. Кривошип OM кулисы Вольфа равномерно вращается около неподвижной оси O так, что угол $\varphi = (\pi/4)t$ рад (рис 9.4). Длина стержня $OM = 0,2$ м. В начальный момент стержень OM составил с осью Ox угол $\varphi_0 = 0$. Составить уравнение движения кулисы.

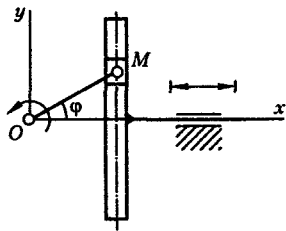


Рис. 9.4

Решение. Из конструкции механизма видно, что кулиса движется возвратно-поступательно вдоль оси x . Очевидно, что кулиса будет двигаться по тому же закону, по которому движется проекция точки M на ось x , следовательно,

$$x = x_M = OM \cos \varphi = 0,2 \cos(\pi/4)t \text{ [м]}.$$

9.4. Скорость точки

Скорость есть кинематическая мера движения точки, характеризующая быстроту изменения ее положения.

Как известно из физики, при равномерном движении скорость измеряется длиной пути, пройденного за единицу времени:

$$v = s / t = \text{const}$$

(предполагается, что начала отсчета пути и времени совпадают).
Единица скорости

$$[v] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{\text{длина}}{\text{время}} = \text{метр в секунду} = \text{м/с.}$$

Скорость есть величина векторная. При прямолинейном равномерном движении скорость постоянна и по модулю, и по направлению, а вектор ее совпадает с траекторией (рис. 9.5, а).

При криволинейном движении скорость точки по направлению меняется. Для того чтобы установить направление вектора скорости при криволинейном движении, разобьем траекторию на бесконечно малые участки пути, которые можно считать вследствие их малости прямолинейными. Тогда на каждом участке условная скорость v_n такого прямолинейного движения будет направлена по хорде. В пределе при Δs , стремящемся к нулю, хорда совпадает с касательной, следовательно, *скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории в сторону движения* (рис. 9.5, б).

При неравномерном движении точки модуль ее скорости меняется. Представим себе точку, движение которой задано естественным способом уравнением

$$s = f(t).$$

Если за небольшой промежуток времени Δt точка прошла путь Δs , то ее средняя скорость равна

$$v_{\text{cp}} = \Delta s / \Delta t.$$

Средняя скорость не дает представления об истинной скорости в каждый данный момент времени (истинную скорость иначе называют мгновенной). Чем меньше промежуток времени, за который определяется средняя скорость, тем ближе она к истинной.

Истинная скорость есть предел, к которому стремится средняя скорость при Δt , стремящемся к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s / \Delta t = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, числовое значение скорости равно

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

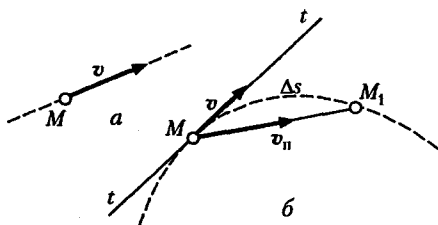


Рис. 9.5

Истинная скорость при любом движении точки равна первой производной координаты (т.е. расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Движение, в котором скорость с течением времени возрастает, называют **у с к о р е н н ы м**; движение, в котором скорость с течением времени уменьшается, — **з а м е д л е н н ы м**.

Пример 9.3. Поезд движется согласно уравнению

$$s = 0,1t^2 + t,$$

где t — в секундах, s — в метрах.

Определить среднюю скорость поезда за промежуток времени между концом 10-й и 20-й секунд и истинную скорость в конце 20-й секунды.

Р е ш е н и е. Для определения средней скорости поезда найдем приращения времени и пути за указанный промежуток времени:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с};$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (0,1t_2^2 + t_2) - (0,1t_1^2 + t_1) = 0,1 \cdot 20^2 + 20 - 0,1 \cdot 10^2 - 10 = 40 \text{ м}.$$

Средняя скорость поезда определится так:

$$v_{\text{ср}} = \Delta s / \Delta t = 40 / 10 = 4 \text{ м/с}.$$

Для определения истинной скорости поезда продифференцируем уравнение движения по времени, в результате чего получим формулу, выражающую зависимость истинной скорости от времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1t^2 + t)}{dt} = 0,2t + 1.$$

Подставив в это выражение время t_2 , получим значение истинной скорости в конце 20-й секунды:

$$v_{20} = 0,2t_2 + 1 = 0,2 \cdot 20 + 1 = 5 \text{ м/с}.$$

Пусть точка из положения M , двигаясь неравномерно, за время Δt перешла в положение M_1 (см. рис. 9.5, б). Дугу MM_1 обозначим Δs . Отрезок MM_1 назовем вектором перемещения точки M . Допустим, что точка M перешла за время Δt в положение M_1 , двигаясь по хорде и притом равномерно, тогда скорость такого прямолинейного движения будет

$$v_{\text{п}} = MM_1 / \Delta t.$$

Перейдем к пределу, умножив предварительно числитель и знаменатель правой части на Δs , и представим предел произведения как произведение пределов:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{п}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{MM_1}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Так как при Δt , стремящемся к нулю, Δs также стремится к нулю, то первый предел (предел отношения хорды к соответствующей дуге) равен единице. Второй предел дает первую производную пу-

ти по времени, т.е. истинную скорость, причем вектор v_n в пределе будет направлен по касательной, т.е. совпадет с вектором истинной скорости v . Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = v.$$

Следовательно, *предел вектора условной скорости v_n , равный пределу отношения вектора перемещения точки к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю, равен вектору истинной скорости точки.*

В дальнейшем использование этого вывода позволяет упростить математическую часть доказательств некоторых теорем.

9.5. Ускорение точки в прямолинейном движении

Ускорение есть кинематическая мера изменения вектора скорости точки.

Ускорение есть величина векторная. При прямолинейном движении точки вектор скорости всегда совпадает с траекторией и поэтому вектор изменения скорости также совпадает с траекторией.

Из курса физики известно, что ускорение представляет собой изменение скорости в единицу времени. Если за небольшой промежуток времени Δt скорость точки изменилась на Δv , то среднее ускорение

$$a_{cp} = \Delta v / \Delta t.$$

Среднее ускорение не дает представления об истинном ускорении в каждый данный момент времени (истинное ускорение иначе называют мгновенным). Чем меньше промежуток времени, за который определяют среднее ускорение, тем ближе оно к истинному. Истинное ускорение есть предел, к которому стремится среднее ускорение при Δt , стремящемся к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, учитывая, что $v = \frac{ds}{dt}$, получаем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Истинное ускорение в прямолинейном движении равно первой производной скорости или второй производной координаты (расстояния от начала отсчета перемещения) по времени.

Единица ускорения

$$[a] = \frac{[s]}{[t]^2} = \frac{\text{длина}}{\text{время в квадрате}} = \text{метр на секунду в квадрате} = \text{м/с}^2.$$

Пример 9.4. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^4 + 2t$, где s — в метрах, t — в секундах. Найти ее среднее ускорение в промежутке между моментами $t_1 = 5$ с, $t_2 = 7$ с, а также ее истинное ускорение в момент $t_3 = 6$ с.

Решение. Сначала определяем скорость точки:

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 2.$$

Подставляя в формулу вместо t его значения $t_1 = 5$ с и $t_2 = 7$, находим:

$$v_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502 \text{ м/с};$$

$$v_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1374 \text{ м/с}.$$

Следовательно, приращение скорости за данный промежуток времени $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с будет равно

$$\Delta v = v_7 - v_5 = 1374 - 502 = 872 \text{ м/с}.$$

Среднее ускорение точки

$$a_{\text{ср}} = \Delta v / \Delta t = 872 / 2 = 436 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы определить истинное ускорение точки, находим производную от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t^2.$$

Подставляя в формулу вместо t значение $t_3 = 6$, получаем

$$a_6 = 12 \cdot 6^2 = 432 \text{ м/с}^2.$$

9.6. Ускорение точки в криволинейном движении

При движении точки по криволинейной траектории скорость меняет свое направление.

Представим себе точку M , которая за время Δt , двигаясь по криволинейной траектории, переместилась в положение M_1 (рис. 9.6).

Вектор приращения (изменения) скорости обозначим Δv , тогда

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Для нахождения вектора Δv перенесем вектор v_1 в точку M и построим треугольник скоростей. Определим вектор среднего ускорения:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Вектор $a_{ср}$ параллелен вектору Δv , так как от деления векторной величины на скалярную направление вектора не меняется. Вектор истинного ускорения есть предел, к которому стремится отношение вектора приращения скорости к соответствующему промежутку времени, когда последний стремится к нулю:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

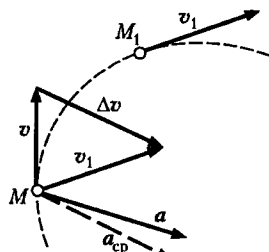


Рис. 9.6

Такой предел называют **векторной производной**. Таким образом, *истинное ускорение точки в криволинейном движении равно векторной производной скорости по времени.*

Из рис. 9.6 видно, что *вектор ускорения в криволинейном движении всегда направлен в сторону вогнутости траектории.*

Так как векторную производную непосредственно вычислять мы не умеем, то ускорение в криволинейном движении будем определять косвенными путями. Так, например, если движение точки задано естественным способом, то применяется теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль. К изучению этой теоремы перейдем, предварительно рассмотрев вопрос о кривизне кривых линий.

9.7. Понятие о кривизне кривых линий

В подразд. 9.8 будет доказано, что *ускорение точки в криволинейном движении зависит от степени изогнутости ее траектории, т. е. от кривизны траектории.*

Рассмотрим криволинейную траекторию точки M (рис. 9.7, а). Угол $\Delta\varphi$ между касательными к кривой в двух соседних точках называется **углом смежности**.

Кривизной кривой в данной точке называется предел отношения угла смежности к соответствующей длине Δs дуги, когда последняя стремится к нулю. Обозначим кривизну буквой k , тогда

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Рассмотрим окружность радиуса R (рис. 9.7, б). Так как

$$\Delta s = R\Delta\varphi,$$

то

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

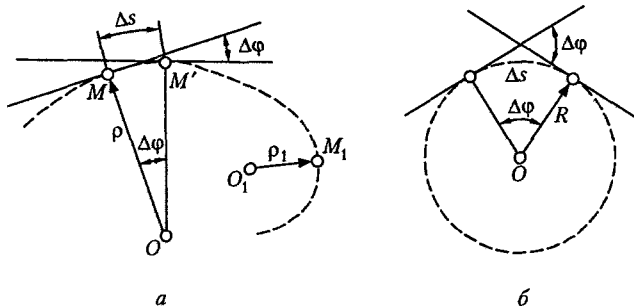


Рис 9.7

Следовательно, кривизна окружности во всех точках одинакова и равна

$$k = 1 / R.$$

Для каждой точки данной кривой можно подобрать такую окружность, кривизна которой равна кривизне кривой в данной точке. Радиус ρ такой окружности называется радиусом кривизны кривой в данной точке, а центр этой окружности называется центром кривизны.

Итак, кривизна кривой в данной точке есть величина, обратная радиусу кривизны в этой же точке:

$$k = 1 / \rho.$$

Очевидно, что кривизна прямой линии равна нулю, а радиус кривизны равен бесконечности:

$$k = 0; \rho = 1 / k = \infty.$$

9.8. Теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль

Проекция полного ускорения на нормаль к траектории называется нормальным ускорением; проекция полного ускорения на касательную к траектории называется касательным ускорением. Касательное ускорение иногда называют тангенциальным.

Теорема. Нормальное ускорение равно квадрату скорости, деленному на радиус кривизны траектории в данной точке, касательное ускорение — первой производной скорости по времени.

Пусть задано плоское движение точки M по траектории AB (рис. 9.8). За время Δt точка перешла из положения M в положение M_1 , пройдя при этом путь $\Delta s = \text{дуга } MM_1$.

Вектор приращения скорости за время Δt равен

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v_1 - v}{\Delta t} - 2 \frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} -$$

$$- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt},$$

так как

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v; \quad \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = 1;$$

$$\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \varphi}{2} = 0; \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

(предел второго слагаемого равен нулю, так как он представляет собой произведение конечных величин, умноженных на нуль).

Итак,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_t = \frac{dv}{dt};$$

и теорема доказана.

Анализируя формулы касательного и нормального ускорений, можно увидеть, что если нет изменения скорости по модулю, то $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$; если нет изменения скорости по направлению (прямолинейное движение), то $a_n = v^2 / \infty = 0$. Отсюда следует, что *касательное ускорение характеризует изменение скорости только по модулю, а нормальное — только по направлению.*

Зная касательное и нормальное ускорения, можно вычислить модуль и направление полного ускорения по формулам:

модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2};$$

направление ускорения

$$\cos(\mathbf{a}_t, \mathbf{a}) = a_t / a.$$

Часто касательное и нормальное ускорения рассматривают не как проекции, а как составляющие полного ускорения,

т.е. как векторные величины. Из подразд. 2.3 нам известно, что если оси взаимно-перпендикулярны, то проекции вектора на эти оси и его составляющие, направленные по этим осям, равны по модулю.

Касательное, нормальное и полное ускорения изображены на рис. 9.9.

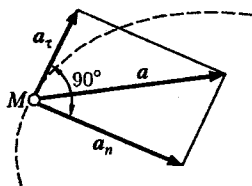


Рис. 9.9

Если $a_t = \frac{dv}{dt} > 0$, то векторы касательного

ускорения и скорости направлены в одну сторону и движение будет ускоренным. Если $a_t = \frac{dv}{dt} < 0$, то вектор касательного ускорения направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и движение будет замедленным.

Вектор нормального ускорения всегда направлен к центру кривизны, поэтому это ускорение иначе называют **центробежным**.

Пример 9.5. Точка обода маховика в период разгона движется согласно уравнению $s = 0,1t^3$, t — в секундах, s — в метрах. Радиус маховика равен 2 м. Определить нормальное и касательное ускорения точки в момент, когда ее скорость $v = 30$ м/с.

Решение. Для определения скорости вычислим производную пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = 0,3t^2,$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{v}{0,3}} = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

Для этого момента следует определить нормальное и касательное ускорения точки. Находим касательное ускорение как производную скорости по времени:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0,6t.$$

Подставляем в выражение для касательного ускорения значение $t = 10$ с:

$$a_t = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки определяем по формуле

$$a_n = v^2 / \rho.$$

Для момента времени $t = 10$ с находим

$$a_n = 30^2 / 2 = 450 \text{ м/с}^2.$$

9.9. Виды движения точки в зависимости от ускорений

Анализируя полученные формулы касательного и нормального ускорений, можно установить следующие виды движения точки:

$$1) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0; a_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0,$$

в этом случае движение *неравномерное* ($v \neq \text{const}$) *криволинейное* ($\rho \neq \infty$);

$$2) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0; a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

в этом случае движение *равномерное* ($v = \text{const}$) *криволинейное* ($\rho \neq \infty$);

$$3) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} \neq 0; a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

в этом случае движение *неравномерное* ($v \neq \text{const}$) *прямолинейное* ($\rho = \infty$);

$$4) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \text{const} \neq 0,$$

в этом случае движение *равнопеременное* (*криволинейное*, если $a_n \neq 0$, *прямолинейное*, если $a_n = 0$);

$$5) a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0, a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

в этом случае движение *равномерное прямолинейное*, которое является *единственным видом движения без ускорения*.

9.10. Формулы и графики равномерного движения точки

Как было установлено ранее, при равномерном движении касательное ускорение $a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 0$. Следовательно, модуль скорости точки при равномерном движении есть величина постоянная:

$$\frac{ds}{dt} = v = \text{const.}$$

Отсюда

$$ds = v dt.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt, \quad s - s_0 = vt,$$

где s_0 — начальное расстояние.

Итак, формулы равномерного движения точки имеют следующий вид:

$$v = \text{const}; \quad s = s_0 + vt.$$

Графики скорости и пути равномерного движения показаны на рис. 9.10, причем предполагается, что $s_0 = 0$.

Нетрудно показать, что скорость точки при равномерном движении пропорциональна тангенсу угла α между прямолинейным графиком этого движения и положительным направлением оси времени:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\mu_s \cdot AB}{\mu_t \cdot OB} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha,$$

где μ_s — масштаб пути, м/мм; μ_t — масштаб времени, с/мм.

Пример 9.6. Первый искусственный спутник Земли, запущенный 4 октября 1957 г. в нашей стране, имел скорость v , равную 7,78 км/с, и период обращения, равный 1 ч 30 мин, или 5400 с. Определить высоту полета спутника над поверхностью Земли, полагая его орбиту круговой, а движение равномерным. Радиус Земли принять равным $R = 6370$ км.

Решение. Обозначим r — радиус орбиты спутника, проведенный из центра Земли; h — искомая высота спутника над поверхностью Земли (рис. 9.11).

Путь s , проходимый спутником за один период обращения, равен произведению времени T , затраченного на один оборот, на скорость v движения спутника. С другой стороны, этот же путь равен длине окружности радиуса r .

Таким образом,

$$s = vT = 2\pi r,$$

откуда

$$r = vT / (2\pi) = 7,78 \cdot 10^3 \cdot 5400 / (2\pi) = 6690 \cdot 10^3 \text{ м} = 6690 \text{ км.}$$

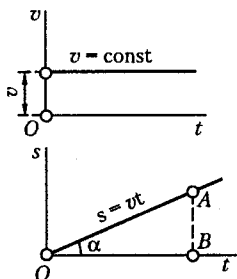


Рис. 9.10

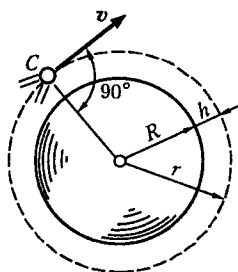


Рис. 9.11

Далее находим искомую высоту полета:

$$h = r - R = 6690 - 6370 = 320 \text{ км.}$$

9.11. Формулы и графики равнопеременного движения точки

Как было установлено ранее, при равнопеременном движении касательное ускорение есть величина постоянная:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \text{const.}$$

Отсюда

$$dv = a_{\tau} dt.$$

Интегрируя это выражение, получаем

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_{\tau} dt; \quad v - v_0 = a_{\tau} t,$$

где v_0 — начальная скорость.

Окончательно для скорости имеем следующее выражение:

$$v = v_0 + a_{\tau} t.$$

Так как

$$ds = v dt,$$

то, интегрируя это выражение, получаем формулу перемещений (расстояний от начального положения):

$$\int_{v_0}^v ds = \int_0^t (v_0 + a_{\tau} t) dt; \quad s - s_0 = v_0 t + a_{\tau} t^2 / 2,$$

где s_0 — начальное расстояние.

Полагая $s_0 = 0$, запишем формулы равнопеременного движения точки:

$$a_{\tau} = \text{const}; \quad v = v_0 + a_{\tau} t; \quad s = v_0 t + a_{\tau} t^2 / 2.$$

Если точка совершает криволинейное движение, то она имеет нормальное ускорение

$$a_n = v^2 / \rho,$$

а модуль ее полного ускорения определится по формуле

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}.$$

Если точка движется прямолинейно, то $a_n = 0$, а полное ускорение равно касательному: $a = a_{\tau}$.

В равноускоренном движении направление вектора ускорения совпадает с направлением вектора скорости; в равнозамедленном движении вектор ускорения направлен в сторону, обратную вектору скорости.

Преобразуем формулу перемещений (расстояний от начала отсчета), исключив из нее время t . Из формулы скорости имеем

$$t = \frac{v - v_0}{a_{\tau}},$$

тогда

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a_{\tau}} + \frac{a_{\tau}}{2} \left(\frac{v - v_0}{a_{\tau}} \right)^2.$$

После преобразований получим

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_{\tau}}.$$

В некоторых случаях при решении задач удобно пользоваться формулой перемещений при равнопеременном движении в ином виде. Так как

$$s = v_{\text{ср}} t, \text{ то } s = \frac{v_0 + v}{2} t.$$

Графики ускорения, скорости и перемещения точки при прямолинейном равнопеременном движении представлены на рис. 9.12.

Кривая перемещений (расстояний) при равнопеременном движении представляет собой параболу.

Из высшей математики известно, что если построить график какой-то функции $y = f(x)$, то в любой точке этого графика

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, который составляет в этой точке касательная к кривой с положительным направлением оси абсцисс.

Применяя это положение к изображенным на рис. 9.12 графикам движения точки и учитывая масштабы пути и времени, получим

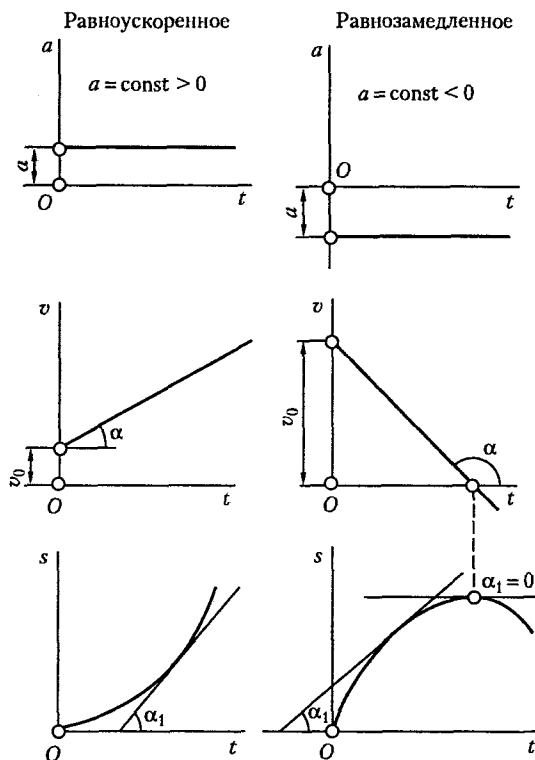


Рис. 9.12

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_1,$$

где α_1 — угол между касательной к графику перемещения и положительным направлением оси времени; μ_s — масштаб пути, м/мм; μ_t — масштаб времени, с/мм.

Из изложенного следует, что если касательная к кривой перемещений составляет острый угол с положительным направлением оси времени, то в этот момент скорость точки положительная; при тупом угле скорость точки в этот момент отрицательная. Если касательная в какой-то точке кривой перемещений параллельна оси времени, то скорость точки в этот момент равна нулю (см. рис. 9.12).

Аналогичная связь имеется между графиками скорости и ускорения прямолинейного движения точки, а именно:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол между касательной к графику скорости и положительным направлением оси времени; μ_v — масштаб скорости, (м/с)/мм.

Нужно обратить внимание на то, что кривая перемещений при равноускоренном движении имеет выпуклость, направленную вниз (вторая производная перемещения по времени положительна), а при равнозамедленном движении — выпуклость, направленную вверх (вторая производная перемещения по времени отрицательна).

Пример 9.7. Вагон скатывается по наклонной плоскости с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$. Какую скорость разовьет вагон в конце наклонной горки, длина которой 250 м? Начальная скорость вагона $v_0 = 1 \text{ м/с}$.

Решение. Для определения скорости движения вагона в конце наклонной горки применим формулу

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Из этой формулы найдем

$$v^2 = 2as + v_0^2.$$

Подставляя значения величин и извлекая квадратный корень, получим

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 250 + 1} = 10,05 \text{ м/с}.$$

9.12. Теорема о проекции скорости на координатную ось

Если движение точки задано естественным способом, то ее скорость находят как первую производную перемещения по времени; если движение точки задано в координатной форме, то — с помощью теоремы о проекции скорости на координатную ось.

Теорема. *Проекция скорости на координатную ось равна первой производной от соответствующей координаты по времени.*

Пусть плоское движение точки M задано координатным способом уравнениями движения:

$$x = f(t); \quad y = f_1(y).$$

За время Δt точка перешла из положения M в положение M_1 (рис. 9.13). Если бы точка двигалась по хорде равномерно, то ее условная скорость была бы равна

$$v_n = \frac{MM_1}{\Delta t}.$$

Спроецируем вектор v_n и точку M на ось x , тогда

$$v_{nx} = v_n \cos(v_n, x) = \frac{MM_1}{\Delta t} \cos(v_n, x).$$

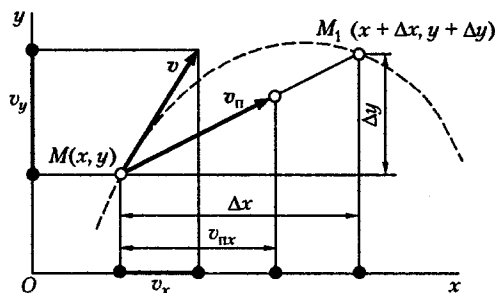


Рис. 9.13

Так как

$$MM_1 \cos(v, x) = \Delta x, \text{ то } v_{px} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{px} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Так как скорость v в пределе дает истинную скорость, то предел, стоящий в левой части равенства, дает проекцию истинной скорости на ось x , а правая часть есть первая производная от абсциссы x по времени, следовательно,

$$v_x = \frac{dx}{dt};$$

теорема доказана.

Аналогично,

$$v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Зная две проекции скорости, можно найти ее модуль и направление по формулам:

модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

направление скорости

$$\cos(v, x) = v_x / v.$$

Пример 9.8. Найти модуль скорости середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма и скорости ползуна B , если $OA = AB = 0,8$ м, а угол $\varphi = \omega t$, где ω — постоянная величина, t — в секундах (см. рис. 9.3).

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнениями движения точки M и ползуна B , полученными в примере 9.1:

$$x_M = 1,2 \cos \varphi = 1,2 \cos \omega t \text{ [м];}$$

$$y_M = 0,4 \sin \varphi = 0,4 \sin \omega t \text{ [м];}$$

$$x_B = 1,6 \cos \varphi = 1,6 \cos \omega t \text{ [м].}$$

Для определения скорости точки M применим теорему о проекции скорости на координатную ось, в результате чего получим

$$v_{M_x} = \frac{dx_M}{dt} = -1,2\omega \sin \omega t; \quad v_{M_y} = \frac{dy_M}{dt} = 0,4\omega \cos \omega t.$$

Определим модуль скорости точки M :

$$v_M = \sqrt{v_{M_x}^2 + v_{M_y}^2} = \sqrt{(1,2\omega \sin \omega t)^2 + (0,4\omega \cos \omega t)^2} = 0,4\omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1} \text{ [м/с].}$$

Так как ползун B движется прямолинейно, то для определения модуля скорости его движения продифференцируем уравнение движения по времени, в результате чего получим

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = -1,6 \sin \omega t \text{ [м/с].}$$

9.13. Теорема о проекции ускорения на координатную ось

Если движение точки задано естественным способом, то ее ускорение определяют с помощью теоремы о проекции ускорения на касательную и нормаль; если движение точки задано координатным способом, то — с помощью теоремы о проекции ускорения на координатную ось.

Теорема. *Проекция ускорения на координатную ось равна второй производной от соответствующей координаты по времени.*

Из доказанной в подразд. 9.12 теоремы видно, что проекция скорости точки на координатную ось равна скорости проекции точки на ту же ось.

Аналогичное положение будет справедливо и для ускорения точки, т.е. проекция ускорения точки на координатную ось равна ускорению проекции точки на ту же ось. Так как проекции точек на оси движутся прямолинейно, то, согласно подразд. 9.5,

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Зная две проекции ускорения, можно найти модуль и направление полного ускорения по формулам:

модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

направление ускорения

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_x / a.$$

Пример 9.9. Движение точки определяется уравнениями

$$x = 20t^2 + 5, \quad y = 15t^2 - 3,$$

где t — в секундах, x и y — в метрах. Определить модуль и направление скорости и ускорения в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Для определения модуля и направления скорости точки применим теорему о проекции скорости на координатную ось. Продифференцировав по времени уравнения движения точки, получим:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 40t; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 30t.$$

Модуль скорости точки определим по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40t)^2 + (30t)^2} = 50t.$$

Подставив значение времени $t = 2$ с, получим

$$v_2 = 50 \cdot 2 = 100 \text{ м/с}.$$

Направляющий косинус определим по формуле

$$\cos(v, x) = v_x / v = 40t / (50t) = 0,8.$$

Для определения модуля и направления ускорения точки применим теорему о проекции ускорения на координатную ось. Второй раз продифференцировав по времени уравнения движения точки, получим

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 40t; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 30.$$

Модуль ускорения точки определим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ м/с}^2.$$

Направляющий косинус

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = a_x / a = 40 / 50 = 0,8.$$

Угол между векторами $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ и осью x является углом первой четверти, так как

$$\sin(v, x) = \sin(a, x) = 0,6$$

есть величина положительная.

Так как направление вектора скорости в любой момент времени остается неизменным, то движение точки является прямолинейным и полное ее ускорение можно определить по формуле

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(50t)}{dt} = 50 \text{ м/с}^2.$$

Глава 10

ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

10.1. Поступательное движение

Различают два вида простейших движений твердого тела: поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Движение тела, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной своему первоначальному положению, называется поступательным. Представление о поступательном движении можно получить, наблюдая движение кузова вагона трамвая на прямолинейном участке пути, поступательно движется стол продольно-строгольного станка, поршень стационарного двигателя внутреннего сгорания и т.п.

Теорема. При поступательном движении все точки твердого тела имеют одинаковые траектории, скорости и ускорения.

Пусть за время Δt тело, двигаясь поступательно, переместилось из положения AB в положение A_1B_1 , причем произвольная точка A прошла путь Δs_A , а другая произвольная точка B прошла путь Δs_B (рис. 10.1):

$$\sphericalangle AA_1 = \Delta s_A; \quad \sphericalangle BB_1 = \Delta s_B.$$

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 хордами. Так как $AB = A_1B_1$ (тело твердое) и $AB \parallel A_1B_1$ (движение поступательное), то фигура ABB_1A_1 — параллелограмм. Следовательно, хорда AA_1 равна и параллельна хорде BB_1 .

Возьмем промежуточное положение прямой A_2B_2 и соединим концы этого отрезка с точками A и A_1 , B и B_1 , как показано на рисунке.

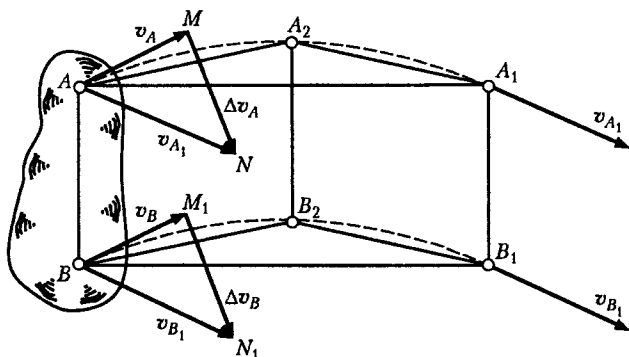


Рис. 10.1

Аналогично предыдущему можно доказать, что вписанные ломанные линии AA_2A_1 и BB_2B_1 имеют попарно равные и параллельные стороны. Если бесконечное число раз удваивать число сторон этих ломанных линий, то в пределе они дадут дуги Δs_A и Δs_B . Но так как эти ломанные линии всегда одинаковы, то они одинаковы и в пределе, следовательно, траектории произвольных точек A и B будут одинаковы:

$$\cup \Delta s_A = \cup \Delta s_B.$$

Так как точки A и B выбраны произвольно, то, следовательно, *траектории всех точек тела будут одинаковы.*

Докажем теперь, что скорости и ускорения точек A и B , а следовательно, и всех точек тела в каждый данный момент времени равны. Так как векторы перемещений точек A и B равны между собой:

$$AA_1 = BB_1,$$

то, разделив обе части этого векторного равенства на Δt и перейдя к пределу при Δt , стремящемся к нулю, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t}.$$

Эти пределы дают векторы скоростей точек (см. подразд. 9.4), следовательно,

$$v_A = v_B.$$

Перенесем векторы скоростей v_{A_1} и v_{B_1} в точки A и B и найдем векторы приращения скоростей Δv_A и Δv_B . Рассмотрим треугольники AMN и BM_1N_1 . Эти треугольники конгруэнтны (равны), и их равные стороны попарно параллельны, следовательно,

$$\Delta v_A = \Delta v_B.$$

Разделим обе части этого векторного равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю, в результате чего получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_B}{\Delta t}$$

или

$$a_A = a_B;$$

теорема доказана.

Таким образом, *поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной из его точек, следовательно, все*

формулы кинематики точки применимы для тела, движущегося поступательно.

Пример 10.1. Звенья 1 и 2 механизма чертежного приспособления (рис. 10.2) могут поворачиваться относительно опор А и С и шарнирно соединены с диском 3, диск и линейка 6 шарнирно соединены звеньями 4 и 5. Доказать, что диск 3 и линейка 6 будут совершать поступательное движение, если $AB = CD$, $AC = BD$, $EF = GH$, $EG = FH$.

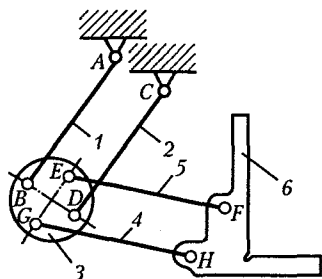


Рис. 10.2

Решение. Рассмотрим четырехугольник $ABDC$. Так как противоположные стороны этого четырехугольника по условию попарно равны, то он представляет собой параллелограмм. Отсюда следует, что при любом перемещении звеньев 1 и 2 сторона BD остается параллельной неподвижной стороне AC . Таким образом, согласно определению поступательного движения, сторона BD и жестко связанный с нею диск могут перемещаться только поступательно. Так же, только поступательно, может перемещаться и отрезок EG , жестко связанный с диском 3.

Далее рассмотрим четырехугольник $EFHG$, который по условию является параллелограммом при любом положении механизма. Следовательно, сторона FH движется так же, как сторона EG , т.е. поступательно. Очевидно, что линейка 6, жестко связанная со стороной FH , также может двигаться только поступательно.

В приведенном примере предполагалось, что звенья механизма представляют собой абсолютно твердые тела.

10.2. Вращение вокруг неподвижной оси

Движение, при котором по крайней мере две точки твердого тела или неизменяемой системы остаются неподвижными, называется вращательным; прямая линия, соединяющая эти две точки, называется осью вращения. В определении вращательного движения говорится о неизменяемой системе, потому что ось вращения может лежать и вне тела.

Вращательное движение в технике встречается весьма часто. В подавляющем большинстве механизмов и машин имеются звенья, которые совершают вращательное движение, например валы, зубчатые колеса, кривошипы и т.д. Заметим, что понятие вращательного движения может относиться только к телу, но не к точке; так, например, движение точки по окружности есть не вращательное движение, а криволинейное.

Рассмотрим диск, вращающийся вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 10.3). Точка O — след этой оси. Очевидно, что траектории точек вращающегося тела есть окружности различ-

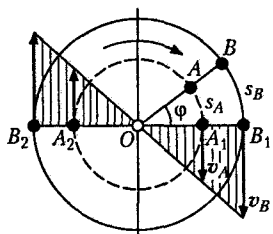


Рис. 10.3

ных радиусов, расположенные в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, с центрами, лежащими на этой оси.

Пусть за время t диск повернулся на угол φ . При этом точка A прошла путь s_A , а точка B — путь s_B . Так как точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, за один и тот же промежуток времени проходят разные пути, то, следовательно, они имеют разные скорости и ускорения.

Итак, при вращательном движении тела его точки, находящиеся на различном расстоянии от оси вращения, имеют неодинаковые траектории, скорости и ускорения.

Отсюда следует, что линейное перемещение (путь), линейные скорость и ускорение точек не могут характеризовать вращательное движение тела в целом. Вращательное движение тела можно характеризовать углом φ , на который повернулось тело за данный промежуток времени. Этот угол называется **угловым перемещением** тела. Угловое перемещение выражается в радианах (рад) или оборотах (об); в последнем случае угловое перемещение обозначают N . Для установления зависимости между φ и N составим пропорцию:

$$1 \text{ об} - 2\pi \text{ рад},$$

$$N \text{ об} - \varphi \text{ рад},$$

откуда

$$\varphi = 2\pi N \text{ рад},$$

где N — число оборотов тела.

Угловое перемещение тела есть функция времени, следовательно, закон вращательного движения в самом общем виде выглядит так:

$$\varphi = f(t).$$

Из рис. 10.3 видно, что путь любой точки вращающегося тела

$$s = r\varphi,$$

где r — расстояние точки от оси вращения.

Скорость любой точки тела определяется так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt}$$

(r вынесли за знак производной, так как для данной точки твердого тела эта величина постоянна).

Выражение $\frac{d\varphi}{dt}$ обозначим ω и назовем угловой скоростью. Угловая скорость есть кинематическая мера движения вращающегося тела, характеризующая быстроту его углового перемещения:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловая скорость равна первой производной углового перемещения по времени.

Единица угловой скорости

$$[\omega] = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{\text{плоский угол}}{\text{время}} = \text{радиан в секунду} = \text{рад/с}.$$

Формула для определения скорости любой точки вращающегося тела имеет следующий вид:

$$v = \omega r.$$

Скорость точки в каждый момент времени прямо пропорциональна ее расстоянию от оси вращения, следовательно, график скоростей точек, например диаметра B_1B_2 , будет представлять собой два треугольника (см. рис 10.3). Очевидно, что *вектор скорости точки вращающегося тела направлен перпендикулярно радиусу, соединяющему эту точку с осью вращения*. Если точка лежит на поверхности вращающегося тела, то ее скорость называют *окружной*.

В технике часто скорость вращения выражают в оборотах в минуту, обозначают буквой n и называют *частотой вращения*. Установим зависимость между угловой скоростью и частотой вращения, выраженными соответственно в рад/с и мин⁻¹. Запишем пропорцию:

$$\omega \text{ рад} - 1 \text{ с},$$

$$2\pi n \text{ рад} - 60 \text{ с}.$$

Из пропорции найдем

$$\omega = \pi n / 30 \text{ рад/с},$$

где n — частота вращения тела, об/мин или мин⁻¹.

Пример 10.2. Сколько времени (мин) продлится обточка вала диаметром $d = 180$ мм и длиной $l = 1000$ мм, если обточка ведется за один проход резца, подача резца за один оборот изделия $s_{\text{об}} = 0,5$ мм/об, а скорость резания $v = 135$ м/мин.

Решение. Прежде всего определим угловую скорость ω и частоту вращения n вала

$$\omega = v / (0,5d) = 135 / (0,5 \cdot 0,18 \cdot 60) = 25 \text{ рад/с};$$

$$n = 30\omega / \pi = 30 \cdot 25 / 3,14 = 238 \text{ мин}^{-1}$$

Далее определим подачу резца в минуту:

$$s_{\text{мин}} = s_{\text{ог}} n = 0,5 \cdot 238 = 119 \text{ мм/мин} = 0,119 \text{ м/мин.}$$

Разделив длину обрабатываемой поверхности на минутную подачу резца, определим машинное время, необходимое для обточки вала:

$$t = l / s_{\text{мин}} = 1 / 0,119 = 8,4 \text{ мин.}$$

Пример 10.3. Проект создания мировой ретрансляционной системы телевидения заключается в запуске трех искусственных спутников Земли таким образом, чтобы они образовали равносторонний треугольник, неподвижный по отношению к Земле. С какой скоростью должны двигаться спутники по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора, если известно, что они будут летать на высоте $h = 35\,800 \text{ км}$? Радиус Земли на экваторе $R = 6370 \text{ км}$ (рис. 10.4). Определить также окружную скорость точки на экваторе.

Решение. Если спутники будут неподвижны по отношению к Земле, то можно считать, что вместе с Землей они составляют неизменяемую систему. Определим окружную скорость v_A точки A , находящейся на экваторе Земли, по формуле

$$v_A = \omega R.$$

Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси равна

$$\omega = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с.}$$

Тогда скорость точки A будет равна

$$v_A = 0,727 \cdot 10^{-4} \cdot 6370 \cdot 10^3 = 463 \text{ м/с.}$$

Так как спутники составляют вместе с Землей неизменяемую систему, вращающуюся вокруг земной оси, то скорости точек этой системы прямо пропорциональны их расстояниям от оси вращения:

$$v_C / v_A = (R + h) / R.$$

Следовательно, искомая скорость спутников:

$$v_C = \frac{v_A (R + h)}{R} =$$

$$= \frac{463(6370 + 35\,800)10^3}{6370 \cdot 10^3} = 3060 \text{ м/с.}$$

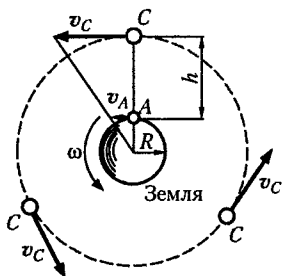


Рис. 10.4

10.3. Различные случаи вращательного движения

Равномерное вращательное движение. Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью, то движение называется **равномерным**. Формулы равномерного вращательного движения

$$\omega = \text{const}; \quad \varphi = \omega t.$$

Касательное, нормальное и полное ускорения любой точки равномерно вращающегося тела определяют так:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = 0;$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r;$$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = a_n = \omega^2 r.$$

Пример 10.4. Маховое колесо вращается равномерно с угловой скоростью 4π рад/с. Сколько оборотов колесо сделает за 2 мин?

Решение. Применим формулу равномерного вращательного движения и определим угловое перемещение колеса за время $t = 2$ мин $= 120$ с:

$$\varphi = \omega t = 4\pi \cdot 120 = 480\pi \text{ рад.}$$

Далее определим число оборотов N тела за тот же промежуток времени:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{480\pi}{2\pi} = 240 \text{ об.}$$

Неравномерное вращательное движение. Если угловая скорость вращающегося тела с течением времени меняется, то движение называется **неравномерным**. В самом общем виде формулы неравномерного вращательного движения выглядят так:

$$\varphi = f(t); \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Касательное ускорение любой точки неравномерного вращающегося тела определяют следующим образом:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}.$$

Выражение $\frac{d\omega}{dt}$ обозначают α и называют **угловым ускорением**. Угловое ускорение есть кинематическая мера изменения угловой скорости вращающегося тела:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Угловое ускорение равно первой производной угловой скорости или второй производной углового перемещения по времени.

Единица углового ускорения

$$[\alpha] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2};$$

$$[\alpha] = \frac{\text{плоский угол}}{\text{время в квадрате}} = \text{радиан на секунду в квадрате} = \text{рад/с}^2.$$

Теперь можно записать формулу для определения касательного ускорения любой точки неравномерно вращающегося тела a_τ в таком виде:

$$a_\tau = \alpha r.$$

Нормальное ускорение определяется по такой же формуле, как и в случае равномерного вращения, т.е.

$$a_n = \omega^2 r.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2},$$

откуда

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}.$$

Направляющий тангенс

$$\text{tg}(a, a_n) = a_\tau / a_n = \alpha r / (\omega^2 r),$$

откуда

$$\text{tg}(a, a_n) = \alpha / \omega^2.$$

Если направление углового ускорения совпадает с направлением вращения, то вращательное движение является ускоренным, и наоборот (рис. 10.5).

Пример 10.5. Написать уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход, если известно, что угол φ , рад, поворота диска пропорционален кубу времени и при $t = 3$ с угловая скорость равна 27π рад/с.

Решение. Согласно условию задачи, уравнение вращения диска паровой турбины при пуске в ход будет выглядеть так:

$$\varphi = bt^3.$$

Для определения коэффициента пропорциональности b продифференцируем уравнение вращения диска, в результате чего получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \frac{d(bt^3)}{dt} = 3bt^2,$$

откуда

$$b = \omega / (3t^2).$$

Подставив в это уравнение значения времени и угловой скорости, получим

$$b = 27\pi / (3 \cdot 3^2) = \pi.$$

Следовательно, уравнение движения диска турбины имеет вид

$$\varphi = \pi r^2.$$

Равнопеременное вращательное движение. Если тело вращается вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением, то движение называется равнопеременным. Формулы этого вида вращательного движения могут быть получены таким же способом, каким были выведены формулы равнопеременного движения точки, т.е. с помощью интегрального исчисления.

Итак, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси равнопеременно, то

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{const},$$

откуда

$$d\omega = \alpha dt.$$

Интегрируя это равенство по t , получим

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

Получим окончательную формулу угловой скорости в следующем виде:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Далее выведем формулу углового перемещения. Так как при любом вращательном движении

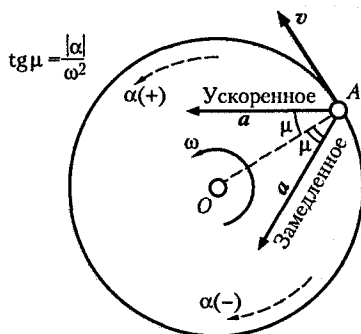


Рис. 10.5

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad d\varphi = \omega dt,$$

то, интегрируя это равенство по t , получим

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t) dt = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \alpha t dt; \quad \varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \alpha t^2 / 2,$$

где φ_0 — начальное угловое перемещение.

Если $\varphi_0 = 0$, то формула углового перемещения примет вид

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2 / 2.$$

Итак, формулы равнопеременного вращательного движения твердого тела записываются следующим образом:

$$\alpha = \text{const};$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t;$$

$$\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2 / 2.$$

Из этих формул можно получить формулы углового перемещения в виде:

$$\varphi = (\omega^2 - \omega_0^2) / (2\alpha) \quad \text{или} \quad \varphi = (\omega_0 + \omega)t / 2.$$

Пример 10.6. В инерционном аккумуляторе Уфимцева* маховик вращается в глубоком вакууме с частотой $20\,000 \text{ мин}^{-1}$. Предоставленный самому себе, он продолжает вращаться до полной остановки в течение двух недель. Определить угловое ускорение маховика, считая его постоянным.

Решение. Определим начальную угловую скорость маховика и время вращения:

$$\omega_0 = \pi n / 30 = \pi \cdot 20\,000 / 30 \text{ рад/с};$$

$$t = 2 \text{ нед} \cdot 7 \text{ сут} \cdot 86\,400 \text{ с}.$$

Разделив начальную угловую скорость на время, получим угловое ускорение:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{-\omega_0}{t} = -\pi \cdot 20\,000 / (30 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 86\,400) = -0,00174 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «-» показывает, что вращение маховика было замедленным.

* А. Г. Уфимцев (1880–1936), которого А. М. Горький назвал поэтом в области научной техники, построил в г. Курске ветровую электростанцию с инерционным аккумулятором механической энергии. В лаборатории при кафедре теоретической механики Курского политехнического института в 1973 г. был оборудован экспериментальный автобус с инерционным аккумулятором механической энергии, дающим возможность значительно экономить горючее и уменьшить количество выбрасываемых в атмосферу вредных выхлопных газов.

10.4. Сравнение формул кинематики для поступательного и вращательного движений

Сравнивая формулы кинематики точки или поступательно движущегося тела с формулами вращательного движения тела, легко заметить, что основные из этих формул аналогичны. Чтобы из формул поступательного движения получить формулы вращательного движения, необходимо вместо линейного перемещения s подставить угловое перемещение φ , вместо линейной скорости v — угловую скорость ω , вместо линейного ускорения a — угловое ускорение α .

Сравнение формул поступательного и вращательного движения удобно провести с помощью табл. 10.1.

Таблица 10.1

Кинематическая мера движения	Характер движения	Вид движения	
		поступательное	вращательное
Перемещение	Неравномерное	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
	Равномерное	$s = vt$	$\varphi = \omega t$
	Равнопеременное	$s = v_0 t + at^2 / 2$	$\varphi = \omega_0 t + \alpha t^2 / 2$
Скорость	Неравномерное	$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
	Равномерное	$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
	Равнопеременное	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
Ускорение касательное	Неравномерное	$a_\tau = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
	Равномерное	$a_\tau = 0$	$\alpha = 0$
	Равнопеременное	$a_\tau = \text{const}$	$\alpha = \text{const}$
Ускорение нормальное		$a_n = v^2 / \rho$	$a_n = \omega^2 r$

10.5. Преобразование вращательных движений

Преобразование вращательных движений осуществляется разнообразными механизмами, которые называются *передачами*. Наиболее распространенные виды таких механизмов — зубчатые, фрикционные передачи и передачи гибкой связью (например, ременные, канатные, ленточные и цепные). С помощью этих механизмов осуществляется передача вращательного движения от ис-

точника движения (ведущего вала) к приемнику движения (ведомому валу).

Передачи характеризуются передаточным отношением или передаточным числом.

Передаточным отношением (i) называется отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена.

Передаточное отношение может быть больше, меньше или равно единице.

Передаточным числом (u) двух сопряженных звеньев называется отношение большей угловой скорости к меньшей.

Передаточное число передачи всегда больше или равно единице.

В целях унификации обозначений передаточные отношения и передаточные числа всех передач мы будем обозначать u , в некоторых случаях с двойным индексом, соответствующим индексам звеньев передачи. Итак, передаточное отношение

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2.$$

Заметим, что индекс 1 приписывают параметрам ведущего звена передачи, а индекс 2 — ведомого.

Передача, у которой угловая скорость ведомого звена меньше угловой скорости ведущего, называется *понижающей*; в противном случае передача называется *повышающей*.

В технике наиболее распространены зубчатые, ременные и цепные передачи.

Общие сведения о простейших зубчатых передачах, их основных видах, а также конструктивных элементах зубчатых колес, реек и червяков известны из курса инженерной графики. Рассмотрим зубчатую передачу, схематически изображенную на рис. 10.6.

В месте соприкосновения зубчатых колес I и II скорости точек первого и второго колеса одинаковы. Обозначив модуль этой скорости v , получим

$$v = \omega_1 d_1 / 2 = \omega_2 d_2 / 2,$$

следовательно,

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = d_2 / d_1.$$

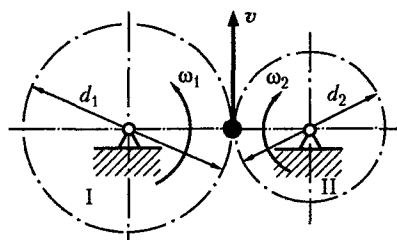


Рис. 10.6

Известно, что диаметр делительной окружности зубчатого колеса равен произведению его модуля на число зубьев $d = mz$, тогда для пары зубчатых колес

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = d_2 / d_1 = z_2 / z_1.$$

Рассмотрим ременную передачу, схематически изображенную на рис. 10.7. При отсутствии проскальзывания ремня по шкивам

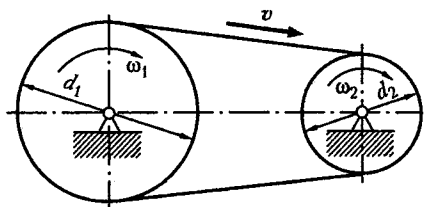


Рис. 10.7

$$v = \omega_1 d_1 / 2 = \omega_2 d_2 / 2,$$

тогда для ременной передачи

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = d_2 / d_1.$$

Для цепных передач

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = z_2 / z_1,$$

где z_1, z_2 — числа зубьев ведущей и ведомой звездочек передачи.

Различные виды передач подробно изучают в курсе деталей машин.

Пример 10.7. В механизме домкрата при вращении рукоятки *A* вращаются зубчатые колеса 1, 2, 3, 4 и 5, которые приводят в движение зубчатую рейку *B* домкрата (рис. 10.8). Определить скорость последней, если частота вращения рукоятки $n = 30$ об/мин, число зубьев колес $z_1 = 6, z_2 = 24, z_3 = 8, z_4 = 32$; радиус пятого колеса $r = 4$ см.

Решение. Для пары зубчатых колес 1 и 2 передаточное отношение

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1.$$

Передаточное отношение для пары колес 3 и 4

$$u_{34} = \omega_3 / \omega_4 = z_4 / z_3.$$

Перемножив правые и левые части двух последних равенств, получим

$$u_{12} u_{34} = (\omega_1 / \omega_2)(\omega_3 / \omega_4) = (z_2 / z_1)(z_4 / z_3).$$

Так как зубчатые колеса 2 и 3 жестко сидят на одном валу, то $\omega_2 = \omega_3$ и, следовательно,

$$u_{12} u_{34} = \omega_1 / \omega_4.$$

Отношение ω_1 / ω_4 есть передаточное отношение двух пар зубчатых колес, изображенных на рис. 10.8, а именно:

$$u_{14} = u_{12} u_{34} = \omega_1 / \omega_4 = (z_2 / z_1)(z_4 / z_3),$$

т. е. *передаточное отношение двух пар зубчатых колес равно произведению передаточных отношений этих пар колес.*

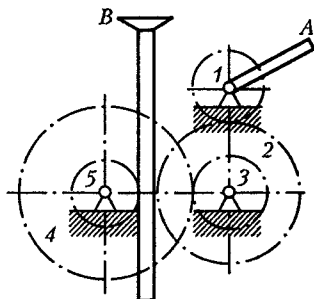


Рис. 10.8

Пользуясь последней формулой, определим угловую скорость колес 4 и 5, жестко сидящих на одном валу ($\omega_4 = \omega_5$):

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_1(z_1/z_2)(z_3/z_4).$$

Так как $\omega_1 = \pi n/30 = \pi \cdot 30/30 = \pi$, рад/с, то

$$\omega_4 = \omega_5 = \pi(6/24)(8/32) = \pi/16 \text{ рад/с}.$$

Определим скорость рейки В:

$$v = \omega_5 r_5 = (\pi/16) 4 \cdot 10^{-2} = 0,78 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 0,78 \text{ см/с}.$$

Глава 11

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

11.1. Понятие о сложном движении точки

До сих пор рассматривалось движение точки по отношению к одной системе координат, которую полагали неподвижной. В мире все находится в непрерывном движении, и неподвижная система координат в действительности не существует. Поэтому нередко возникает необходимость рассматривать движение точек одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых условно считается неподвижной, а вторая определенным образом движется по отношению к первой. Движение точки в этом случае называется **с л о ж н ы м**.

Движение точки по отношению к неподвижной системе координат называется **а б с о л ю т н ы м**. Движение точки по отношению к подвижной системе координат называется **о т н о с и т е л ь н ы м**. Движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной называется **п е р е н о с н ы м**.

Абсолютное движение точки является сложным и состоит из относительного и переносного движений.

Поясним изложенное с помощью рис. 11.1.

Пусть xOy — подвижная система координат, перемещающаяся в плоскости чертежа равномерно поступательно вдоль оси x ; точка A равномерно перемещается вверх по оси y . Если будет совершаться только относительное движение, то точка перейдет из положения A_1 в положение A_1 . Если будет совершаться только переносное движение, то точка из положения A попадет в положение A_2 . Если же одновременно совершаются и относительное и переносное движения, то точка за этот же промежуток времени перейдет из положения A в положение A_3 .

Пользуясь определением переносного и относительного движений, а также рассмотренным выше примером, можно указать на следующий метод изучения этих движений. Если необходимо изу-



Рис. 11.1

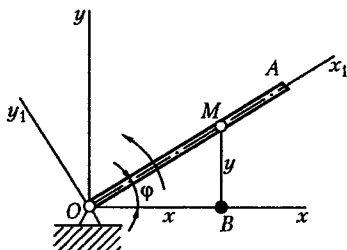


Рис. 11.2

чить относительное движение точки, то следует мысленно остановить переносное движение, если необходимо изучить переносное движение точки, то следует мысленно остановить относительное движение.

Пример 11.1. Стержень OA вращается вокруг оси O в плоскости рисунка по закону $\varphi = bt$; по стержню движется точка M по закону $OM = at$. Найти траекторию абсолютного движения точки M (рис. 11.2).

Решение. Выберем неподвижную систему координат xOy и подвижную систему x_1Oy_1 , неизменно связанную со стержнем OA . В этом случае переносным движением будет вращение подвижных осей вместе с мысленно закрепленной на них в каждый момент точкой M вокруг точки O , а относительным — движение точки M вдоль стержня.

Уравнение переносного вращательного движения запишем так:

$$\varphi = bt.$$

Уравнение относительного движения имеет вид

$$x_1 = OM = at.$$

Определим уравнение абсолютного движения точки в координатной форме, для чего координаты x и y в неподвижной системе отсчета xOy выразим как функции времени t .

Из рис. 11.2 имеем:

$$x = OB = OM \cos \varphi; \quad y = BM = OM \sin \varphi$$

или, подставляя значения φ и OM , получим:

$$x = at \cos bt; \quad y = at \sin bt.$$

Чтобы определить уравнение траектории абсолютного движения точки, исключим из уравнений движения время t , для чего разделим второе уравнение на первое:

$$\frac{y}{x} = \frac{at \sin bt}{at \cos bt} = \operatorname{tg} bt,$$

откуда

$$t = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Кроме того, возведя уравнения движения в квадрат и сложив их, получим

$$x^2 + y^2 = a^2 t^2; \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}.$$

Таково уравнение траектории абсолютного движения точки M . Эта траектория есть архимедова спираль.

11.2. Теорема о сложении скоростей

Скорость точки в абсолютном движении называется абсолютной. Скорость точки в относительном движении называется относительной. Скорость рассматриваемой точки, мысленно закрепленной в данный момент на подвижной системе координат, называется переносной. Связь между этими скоростями устанавливает теорема о сложении скоростей.

Теорема. Абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

Пусть за время Δt точка перешла из положения A в положение A_3 , двигаясь по траектории абсолютного движения, т.е. по дуге AA_3 (рис. 11.3). Если бы имело место только относительное движение, то точка перешла бы в положение A_1 ; если бы только переносное, то точка перешла бы в положение A_2 . Можно предположить, что точка A перешла в положение A_3 , двигаясь сначала только по траектории переносного движения (дуга AA_2), а затем только по траектории относительного движения (дуга A_2A_3 , равная дуге AA_1).

Соединив точки A , A_2 и A_3 хордами, получим следующую зависимость между векторами перемещений точки A :

$$AA_3 = AA_2 + A_2A_3.$$

Разделим все члены равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_2A_3}{\Delta t},$$

что дает

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r,$$

где $\mathbf{v}$ — вектор абсолютной скорости; $\mathbf{v}_e$ — вектор переносной скорости; $\mathbf{v}_r$ — вектор относительной скорости.

Теорема доказана.

Пример 11.2. Стержень OA (рис. 11.4) вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной точки

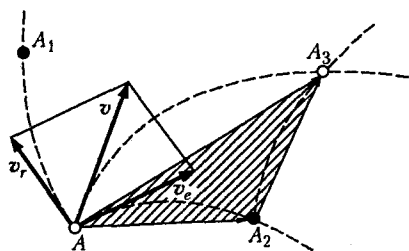


Рис. 11.3

O по закону $\varphi = t^2$. По стержню равноускоренно движется ползун M , удаляясь от точки O . Движение ползуна определяется уравнением

$$s = OM = 2 + 2t^2,$$

где s — в метрах, t — в секундах. Найти абсолютную скорость ползуна в момент $t = 1$ с.

Решение. Выберем неподвижную систему координат xOy ; подвижной системой будем считать стержень. В этом случае относительным движением является движение ползуна M по стержню. Следовательно, относительная скорость направлена вдоль стержня и равна

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 4t.$$

В момент $t = 1$ с относительная скорость по модулю будет равна $v_{r1} = 4$ м/с.

Переносным движением является вращательное движение стержня OA с мысленно закрепленным на нем в данный момент ползуном, поэтому переносная скорость v_e ползуна направлена перпендикулярно стержню, причем ее значение определяется по формуле

$$v_e = \omega OM = \frac{d\varphi}{dt} OM.$$

Так как $OM = s = 2 + 2t^2$, а $\frac{d\varphi}{dt} = 2t$, то $v_e = 2t(2 + 2t^2)$.

Полагая $t = 1$ с, получим $v_{e1} = 8$ м/с.

Так как относительная и переносная скорости взаимно-перпендикулярны, а на основании теоремы о сложении скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$, то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

Подставляя значения скоростей при $t = 1$ с, получим

$$v = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{e1}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94 \text{ м/с}.$$

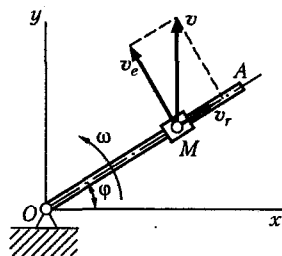


Рис. 11.4

Глава 12

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

12.1. Понятие о плоскопараллельном движении

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных какой-то одной плоскости, называемой основной.



Рис. 12.1

Примерами плоскопараллельного движения могут служить движение колеса на прямолинейном участке пути, движение шатуна на кривошипно-ползунного механизма.

Из определения плоскопараллельного движения следует, что любая прямая AB , проведенная в теле перпендикулярно основной плоскости, движется поступательно (рис. 12.1). Для определения движения тела на каждой прямой, перпендикулярной основной плоскости, надо знать движение только одной точки. Взяв эти точки в одной плоскости Q , параллельной основной, получим сечение S , движение которого определяет движение тела. Но плоское движение сечения S вполне определяется движением двух любых его точек C и D или отрезка CD . Таким образом, *вопрос о плоскопараллельном движении тел сводится к вопросу о движении отрезка прямой в плоскости, параллельной основной.*

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: методом мгновенных центров скоростей и методом разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное.

12.2. Метод мгновенных центров скоростей

В основе этого метода лежит следующая теорема: *всякое плоскопараллельное перемещение твердого тела может быть получено одним вращением около оси, перпендикулярной основной плоскости.*

Пусть отрезок, определяющий плоскопараллельно движение тела, за конечный промежуток времени переместился из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 12.2).

Соединим точки A и A_1 , B и B_1 прямыми линиями и из середин полученных отрезков (точек M и N) восставим перпендикуляры до их взаимного пересечения в точке O . Эту точку соединим прямыми линиями с концами отрезков AB и A_1B_1 и получим два конгруэнтных (равных) треугольника, имеющих общую вершину O :

$$\triangle AOB = \triangle A_1OB_1.$$

Треугольник AOB совмещается с треугольником A_1OB_1 путем поворота на угол φ вокруг точки O , называемой центром конечного поворота. Точка O есть след оси конечного поворота, перпендикулярной основной плоскости. Таким образом, отрезок AB , определяющий плоскопараллельное движение тела, перемещается в любое новое положение путем одного вращения вокруг оси конечного поворота.

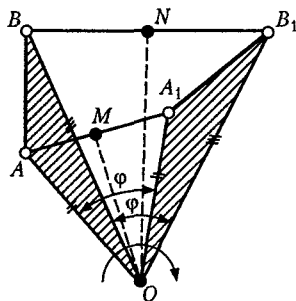


Рис. 12.2

Теорема доказана.

Приведенное доказательство будет справедливо и в том случае, если перемещение тела произойдет за бесконечно малый промежуток времени Δt . В пределе при Δt , стремящемся к нулю, вращение будет происходить вокруг мгновенной оси. След мгновенной оси вращения на плоскости фигуры называют мгновенным центром скоростей. Очевидно, что скорость точки, являющейся в данный момент мгновенным центром скоростей, равна нулю. Угловая скорость ω , с которой происходит мгновенное вращение, называется мгновенной угловой скоростью.

Точка неподвижной плоскости, совпадающая в данный момент времени с мгновенным центром скоростей плоской фигуры, называется мгновенным центром вращения.

Если прямая AB движется параллельно самой себе, то можно полагать, что тело вращается вокруг оси, удаленной в бесконечность, иначе говоря, поступательное движение можно рассматривать как вращательное по кругу бесконечно большого радиуса.

Таким образом, *плоскопараллельное движение тела может осуществляться путем последовательных мгновенных непрерывных поворотов вокруг мгновенных осей вращения.*

Заметим, что методом мгновенных центров скоростей можно пользоваться *только при определении скоростей* точек плоской фигуры, но не при определении траекторий и ускорений этих точек.

12.3. Свойства мгновенного центра скоростей

Рассматривая в каждый момент времени сложное плоскопараллельное движение как простейшее — вращательное, можно для вычисления скоростей точек твердого тела применять все выведенные ранее формулы вращательного движения.

Установим следующие три свойства мгновенного центра скоростей, вытекающие из закона распределения скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси: 1) скорость

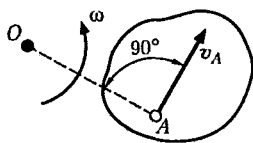


Рис. 12.3

мгновенного центра равна нулю; 2) мгновенный центр лежит на перпендикуляре, восстановленном из точки к направлению ее скорости; 3) скорость точки равна произведению мгновенной угловой скорости на расстояние точки от мгновенного центра скоростей (рис. 12.3):

$$v_A = \omega OA.$$

На основании перечисленных выше свойств можно установить следующие пять способов определения положения мгновенного центра скоростей плоской фигуры, определяющей плоскопараллельное движение тела.

1. Известны мгновенная угловая скорость ω и скорость v_A какой-то точки A плоской фигуры (см. рис. 12.3).

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится на перпендикуляре, восстановленном из точки A к вектору скорости v_A на расстоянии $OA = v_A / \omega$.

2. Известны направления скоростей двух точек A и B плоской фигуры (рис. 12.4).

В этом случае мгновенный центр O лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям их скоростей, причем

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega OA}{\omega OB} = \frac{OA}{OB},$$

т.е. скорости точек плоской фигуры прямо пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей.

3. Известно, что скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, направлены в одну сторону, перпендикулярны отрезку AB и по модулю не равны (рис. 12.5).

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится в точке пересечения прямой, соединяющей начала векторов v_A и v_B с прямой, соединяющей концы этих векторов.

Если векторы скоростей точек A и B равны между собой, то мгновенный центр скоростей в данный момент находится в бесконечности, мгновенная угловая скорость равна нулю, скорости всех точек плоской фигуры будут одинаковыми и движение будет мгновенно поступательным.

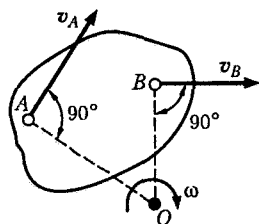


Рис. 12.4

4. Известно, что скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу, направлены в противоположные стороны и перпендикулярны отрезку AB (рис. 12.6).

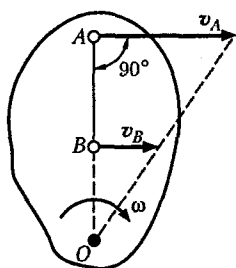


Рис. 12.5

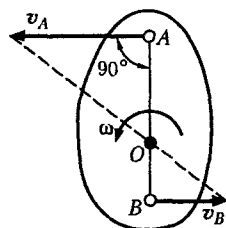


Рис. 12.6

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится в точке пересечения отрезка AB с прямой, соединяющей концы векторов v_A и v_B .

5. Известно, что плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.

В этом случае мгновенный центр скоростей O находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорость этой точки фигуры в данный момент равна нулю.

В заключение рассмотрим качение колеса по прямолинейному рельсу в различных условиях трения.

На рис. 12.7 показаны положения мгновенного центра скоростей (МЦС) и графики скоростей точек вертикального диаметра в случаях трения скольжения, трения качения, трения качения с проскальзыванием, частичного буксования и полного буксования колеса.

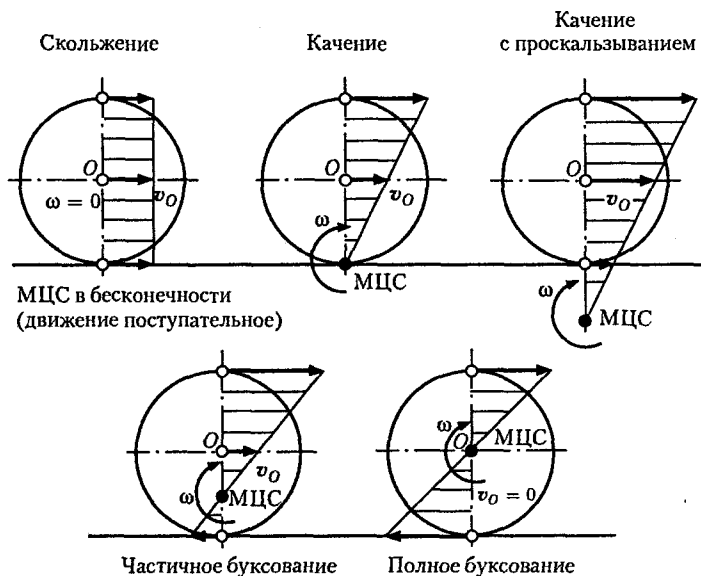


Рис. 12.7

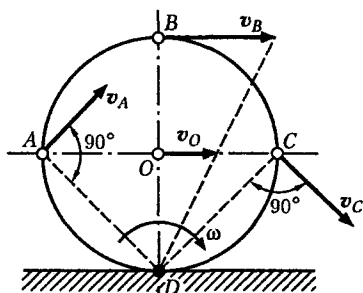


Рис. 12.8

Пример 12.1. Колесо радиуса R катится без скольжения по прямолинейному рельсу, причем скорость его центра O равна $v_O = 2$ м/с (рис. 12.8). Найти скорость концов вертикального и горизонтального диаметров колеса.

Решение. По условию колесо катится без скольжения, поэтому скорость точки D касания колеса с рельсом равна нулю, следовательно, точка D — мгновенный центр скоростей колеса.

Зная скорость точки O , находим угловую скорость ω колеса:

$$\omega = v_O / OD = v_O / R.$$

На основании свойств мгновенного центра скоростей определим модули скоростей точек A , B и C колеса:

$$v_A = \omega \cdot AD = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с};$$

$$v_B = \omega \cdot BD = \frac{v_O}{R} 2R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с};$$

$$v_C = \omega \cdot CD = \frac{v_O}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Направления векторов скоростей точек A , B и C перпендикулярны прямым, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей.

12.4. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

В основе этого метода лежит следующая теорема: *всякое плоскопараллельное перемещение твердого тела может быть получено с помощью одного поступательного и одного вращательного движения.*

Пусть за время Δt отрезок AB , определяющий плоскопараллельное движение тела, переместился в положение A_1B_1 (рис. 12.9).

Предположим, что отрезок AB вначале перемещался только поступательно, причем все его точки двигались одинаково, как точка A . Таким образом, отрезок перешел в положение A_1B_2 , после чего его можно переместить в положение A_1B_1 посредством только вращательного движения во-

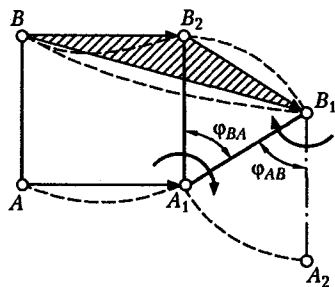


Рис. 12.9

круг точки A_1 . Отсюда видно, что сложное плоскопараллельное движение состоит из *двух* простейших движений: поступательного и вращательного, причем можно считать, что эти движения происходят *одновременно*.

Установим зависимость между векторами скоростей точек A и B . Для этого соединим прямыми точки A, A_1 и B, B_1, B_2 , в результате чего получим следующую зависимость между векторами перемещений точки B :

$$\overline{BB_1} = \overline{BB_2} + \overline{B_2B_1}.$$

Так как $\overline{BB_2} = \overline{AA_1}$, то можно записать, что

$$\overline{BB_1} = \overline{AA_1} + \overline{B_2B_1}.$$

Разделим все члены равенства на Δt и перейдем к пределу при Δt , стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_2B_1}}{\Delta t},$$

получим

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{BA},$$

где $\mathbf{v}_B$ — вектор абсолютной скорости точки B ; $\mathbf{v}_A$ — вектор абсолютной скорости точки A ; $\mathbf{v}_{BA}$ — вектор скорости точки B в относительном вращательном движении отрезка AB вокруг точки A , направленный перпендикулярно отрезку AB .

Таким образом, *плоскопараллельное движение тела может осуществляться путем одновременно происходящих вращательного и поступательного движений; поступательное движение можно считать переносным, а вращательное — относительным. Вектор абсолютной скорости какой-то точки B равен вектору абсолютной скорости любой другой точки A плюс вектор скорости точки B в относительном вращательном движении отрезка AB вокруг точки A .*

Точку, вокруг которой происходит относительное вращательное движение, будем называть *полюсом*.

Если за полюс вместо точки A принять точку B , то, рассуждая аналогично, получим

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB}.$$

Сравнивая это векторное равенство с предыдущим, видим, что векторы относительных скоростей $\mathbf{v}_{BA}$ и $\mathbf{v}_{AB}$ по модулю равны между собой, т. е.

$$v_{BA} = v_{AB}.$$

Из рис. 12.9 видно, что направление относительного вращения и угол поворота отрезка AB за какой-то промежуток времени не зависят от выбора полюса, т.е.

$$\varphi_{BA} = \varphi_{AB}.$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим

$$\frac{d\varphi_{BA}}{dt} = \frac{d\varphi_{AB}}{dt} \text{ или } \omega_{BA} = \omega_{AB}.$$

Следовательно, относительная угловая скорость от выбора полюса не зависит. Аналогично,

$$\frac{d\omega_{BA}}{dt} = \frac{d\omega_{AB}}{dt} \text{ или } \alpha_{BA} = \alpha_{AB}.$$

Следовательно, и относительное угловое ускорение от выбора полюса не зависит.

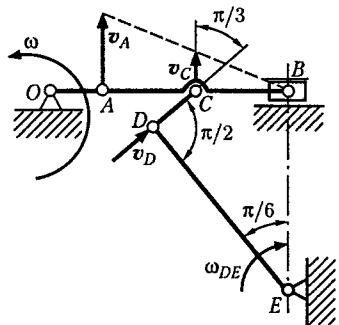
Из рассмотренного следует, что при разложении плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное *поступательная часть движения в общем случае зависит от выбора полюса, а вращательная часть движения от выбора полюса не зависит.*

Так как за полюс может быть выбрана любая точка плоскости, в том числе и мгновенный центр скоростей, то при разложении плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное *угловая скорость относительного вращательного движения всегда равна абсолютной угловой скорости.*

Если векторное равенство $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{AB}$ спроецировать на направление прямой AB , то получим, что проекция $\mathbf{v}_A$ равна проекции $\mathbf{v}_B$, так как проекция $\mathbf{v}_{AB}$ равна 0.

Следовательно, при плоскопараллельном движении *проекции скоростей двух точек плоской фигуры на направление прямой, соединяющей эти точки, равны между собой.*

Пример 12.2. Кривошипный механизм связан шарнирно в середине C



шатуна со стержнем CD , а последний со стержнем DE , который может вращаться вокруг точки E . Определить угловую скорость ω_{DE} стержня DE в указанном на рис. 12.10 положении кривошипного механизма, если точки B и E расположены на одной вертикали; угловая скорость ω кривошипа OA равна 8 рад/с , $OA = 25 \text{ см}$, $DE = 100 \text{ см}$, $\angle CDE = \pi/2 \text{ рад}$ и $\angle BED = \pi/6 \text{ рад}$.

Решение. Прежде всего определим скорость точки A кривошипа OA :

$$v_A = \omega \cdot OA = 8 \cdot 25 \cdot 10^{-2} = 2 \text{ м/с}.$$

Рис. 12.10

В заданном положении механизма ползун B занимает крайнее правое положение и его скорость в этот момент равна нулю. Следовательно, точка B в данный момент — мгновенный центр скоростей шатуна AB . Так как скорости точек шатуна прямо пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра скоростей, то запишем пропорцию

$$v_C / v_A = CB / AB,$$

из которой определим модуль скорости точки C :

$$v_C = v_A \cdot CB / AB = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}.$$

Вектор скорости v_C перпендикулярен шатуну AB . Вектор скорости точки D перпендикулярен стержню DE , т.е. направлен вдоль стержня DC .

Скорость точки D определим, разложив сложное плоскопараллельное движение звена DC на поступательное и вращательное по формуле

$$v_D = v_C + v_{DC},$$

где вектор относительной скорости v_{DC} перпендикулярен звену DC . Спроецировав это векторное равенство на направление прямой DC , получим

$$v_D = v_C \cos \pi / 3 = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с}.$$

Выразив скорость точки D через угловую скорость стержня DE , получим

$$v_D = \omega_{DE} \cdot DE,$$

откуда, подставив числовые значения, найдем

$$\omega_{DE} = v_D / DE = 0,5 / 1 = 0,5 \text{ рад/с}.$$

Раздел третий

ДИНАМИКА

Глава 13

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

13.1. Аксиомы динамики

Динамика есть часть теоретической механики, изучающая механическое движение тел в зависимости от сил, влияющих на это движение.

Основы динамики заложил итальянский ученый Г. Галилей (1564–1642). Галилей опроверг неверное воззрение, существовавшее в науке со времен Аристотеля (IV в. до н.э.), о том, что из двух тел, падающих на Землю, более тяжелое тело движется быстрее. Галилей установил, что сила есть причина изменения скорости, т.е. причина возникновения ускорения. И. Ньютон, развив учение Галилея, дал определения основным понятиям механики и сформулировал аксиомы, или законы, движения, которые до сих пор являются фундаментом, на котором построены современные физические представления.

Динамика основывается на ряде положений, которые являются аксиомами и называются законами динамики. Прежде чем перейти к рассмотрению этих законов, введем новое для нас понятие *изолированной материальной точки*, т.е. точки, на которую не действуют другие материальные точки. В действительности изолированные тела в природе не существуют и понятие изолированной материальной точки условно.

Первый закон динамики, называемый *аксиомой инерции*, или *первым законом Ньютона*, формулируется в применении к материальной точке так: *изолированная материальная точка либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно*.

В кинематике было установлено, что прямолинейное равномерное движение есть единственный вид движения, при котором ускорение равно нулю, поэтому аксиому инерции можно сформулировать так: *ускорение изолированной материальной точки равно нулю*.

Итак, изолированная от влияния окружающих тел материальная точка не может сама себе сообщить ускорение. Это свойство тел называется *инерцией* или *инертностью*.

Можно сказать, что инерция, или инертность, есть способность тела сохранять свою скорость по модулю и направлению неизменной (в том числе и скорость, равную нулю).

Изменить скорость, т.е. сообщить ускорение, может лишь приложенная к телу сила.

Зависимость между силой и сообщаемым ею ускорением устанавливает второй закон динамики, или второй закон Ньютона, который формулируется так: *ускорение, сообщаемое материальной точке силой, имеет направление силы и пропорционально ее модулю.*

Если сила F_1 сообщает материальной точке ускорение a_1 , а сила F_2 — ускорение a_2 , то на основании второго закона Ньютона можно записать

$$F_1 / F_2 = a_1 / a_2 \quad \text{или} \quad F_1 / a_1 = F_2 / a_2.$$

Следовательно, для данной материальной точки отношение силы к ускорению есть величина постоянная. Это отношение обозначим m и назовем *м а с с о й* данной материальной точки:

$$F / a = m = \text{const.}$$

Это равенство означает, что две материальные точки имеют одинаковые массы, если от одной и той же силы они получают одинаковые ускорения; чем больше масса точки, тем большую силу надо приложить, чтобы сообщить точке заданное ускорение.

Масса — одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства.

Ньютон называл массой количество материи, заключенное в теле, и считал массу величиной постоянной.

С современной точки зрения масса тела (отношение силы к ускорению) не является неизменной и зависит от скорости движения. Так, например, при наблюдениях за движением в ускорителях заряженных частиц доказано, что инертность частицы, т.е. способность сохранять свою скорость, возрастает с увеличением ее скорости.

Теория относительности устанавливает следующую зависимость между массой тела, находящегося в покое, и массой движущегося тела:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2 / c^2},$$

где m — масса движущегося тела; m_0 — масса покоя; v — скорость движения тела; c — скорость света.

Из этой формулы видно, что чем больше скорость движения тела, тем больше его масса и, следовательно, тем труднее сообщить ему дальнейшее ускорение.

На основании теории относительности современная наука дает массе такое определение: *масса есть мера инертности тела.*

Однако заметно масса тела меняется лишь при очень больших скоростях, близких к скорости света, поэтому в дальнейшем этим изменением пренебрегаем и считаем массу величиной постоянной.

Второй закон Ньютона выражается равенством

$$F = ma,$$

которое называется основным уравнением динамики и читается так: *сила есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение.*

Основное уравнение динамики есть уравнение движения материальной точки в векторной форме.

Из опыта известно, что *под действием притяжения Земли в пустоте тела падают в данном месте с одинаковым ускорением, которое называется ускорением свободного падения.* Сила тяжести тела равна его массе, умноженной на ускорение свободного падения. Если сила тяжести одного тела $G_1 = m_1 g$, а второго $G_2 = m_2 g$, то

$$G_1 / G_2 = m_1 g / (m_2 g) = m_1 / m_2,$$

т.е. силы тяжести тел пропорциональны их массам, что позволяет сравнивать массы тел путем их взвешивания.

Ускорение свободного падения g в различных местах земной поверхности различно и уменьшается от полюсов к экватору, так как земной шар сплюснут в направлении полюсов. Другой причиной уменьшения ускорения свободного падения при перемещении от полюсов к экватору является существование центростремительной силы инерции, о которой будет идти речь в подразд. 14.2.

Для Москвы $g = 9,8156 \text{ м/с}^2$, на полюсах $g = 9,83 \text{ м/с}^2$, на экваторе $g = 9,78 \text{ м/с}^2$. Очевидно, что сила тяжести тела зависит от места, где производится взвешивание.

Из второго закона Ньютона следует, что *под действием постоянной силы находившаяся в покое свободная материальная точка движется прямолинейно равнопеременно.*

Движение под действием постоянной силы может быть и прямолинейным, и криволинейным (в последнем случае материальная точка имеет начальную скорость, вектор которой не совпадает с линией действия силы, см. подразд. 13.3). Пример движения под действием постоянной силы — свободное падение тел.

К основным законам динамики относится известная из статики аксиома взаимодействия, или третий закон Ньютона. Применительно к материальной точке закон формулируется так: *силы взаимодействия двух материальных точек по модулю равны между собой и направлены в противоположные стороны.*

13.2. Принцип независимости действия сил. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Принцип независимости действия сил формулируется так: *при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение равно векторной сумме ускорений, которые эта точка получила бы от действия каждой силы в отдельности.*

Пусть к материальной точке A приложены силы F_1 и F_2 , равнодействующая которых равна F . На основании аксиомы параллелограмма запишем

$$F_1 + F_2 = F.$$

Разделив обе части равенства на массу точки, получим

$$F_1/m + F_2/m = F/m,$$

откуда

$$a_1 + a_2 = a.$$

Применяя последовательно аксиому параллелограмма, можно показать, что при одновременном действии на материальную точку нескольких сил ее ускорение будет таким, как если бы действовала одна равнодействующая сила:

$$F = \sum F_i.$$

Пользуясь принципом независимости действия сил, выведем уравнение движения материальной точки в дифференциальной форме.

Пусть материальная точка A массой m движется в плоскости чертежа под действием силы $F = \sum F_i$ с ускорением a , тогда

$$F = ma.$$

Спроецируем это векторное равенство на две взаимно-перпендикулярные оси координат x и y (оси и вектор силы F лежат в одной плоскости) и получим уравнения плоского движения материальной точки в координатной форме:

$$F_x = \sum X = ma_x; \quad F_y = \sum Y = ma_y.$$

Применяя теорему о проекции ускорения на координатную ось, эти уравнения можно записать в виде дифференциальных

уравнений плоского движения материальной точки:

$$\sum X = m \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad \sum Y = m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

где $\sum X$, $\sum Y$ — алгебраические суммы проекций сил, действующих на точку, на соответствующие координатные оси; x и y — текущие координаты точки.

С помощью полученных в этом подразделе уравнений решаются две основные задачи динамики: 1) по заданному движению точки определить действующие на нее силы; 2) зная действующие на точку силы, определить ее движение.

В тех случаях, когда при решении задач имеем дело с несвободной материальной точкой, необходимо применять принцип освобожденности, т.е. отбросить связи и заменить их реакциями, учитывая последние в уравнениях движения наравне с действующими на точку активными силами.

Пример 13.1. Движение тела массой 0,5 кг выражается уравнениями

$$x = 2t; \quad y = 3 + t - 5t^2,$$

где x и y — в сантиметрах, t — в секундах. Определить силу, действующую на тело.

Решение. Данный пример относится к первой задаче динамики. Прежде всего, пользуясь теоремой о проекции ускорения на координатную ось, определим проекции ускорения на оси x и y :

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = 0;$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -10 \text{ см/с}^2 = -0,1 \text{ м/с}^2.$$

Подставив эти значения в уравнения движения материальной точки, получим:

$$X = ma_x = 0,5 \cdot 0 = 0;$$

$$Y = ma_y = 0,5(-0,1) = -0,05 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = -0,05 \text{ Н}.$$

По проекциям силы, действующей на тело, видно, что она параллельна оси ординат, направлена в сторону отрицательных ординат и по модулю равна

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = |Y| = 0,05 \text{ Н}.$$

Пример 13.2. Кривошип OA длиной l , вращаясь равномерно с угловой скоростью ω , перемещает кулису, движущуюся поступательно вдоль направляющих $I-I$ (рис. 13.1). Найти, пренебрегая трением, чему при этом равна сила давления F камня A на кулису, если ее сила тяжести равна G .

Решение. Данный пример относится к первой задаче динамики.

Применим принцип освобожденности, отбросим связи кулисы и заменим их реакциями. Реакция N перпендикулярна направляющим кулисы, а сила давления F перпендикулярна кулисе, так как по условию трением пренебрегаем.

Кулиса движется возвратно-поступательно, следовательно, все ее точки движутся одинаково. Составим уравнение движения проекции точки A на ось x , которое и будет кинематическим уравнением движения кулисы:

$$x = l \cos \varphi = l \cos \omega t.$$

Применив теорему о проекции ускорения на координатную ось, определим ускорение кулисы

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -l \omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Составим уравнение движения кулисы в координатной форме:

$$\sum X = m a_x.$$

Спроецировав действующие на кулису силы на ось x и подставив значения массы и ускорения, получим

$$F_x = -F = -\frac{G}{g} \omega^2 x,$$

откуда

$$F = \frac{G}{g} \omega^2 x.$$

Следовательно, сила давления ползуна на кулису изменяется пропорционально расстоянию кулисы от оси кривошипа.

Пример 13.3. На материальную точку массой 4 кг, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости, действует горизонтальная сила $F = 12$ Н. С какой скоростью будет двигаться материальная точка через $t = 10$ с, если до приложения силы эта точка находилась в состоянии покоя?

Решение. Данный пример относится ко второй задаче динамики.

Так как данная материальная точка лежит на гладкой горизонтальной плоскости, то под действием горизонтальной постоянной силы F точка будет двигаться прямолинейно равноускоренно. Направив ось x вдоль траектории точки, запишем уравнение движения:

$$\sum X = m a_x = m a.$$

Спроецировав на ось x действующие на точку силы и подставив в это уравнение значение массы, определим ускорение

$$a = \sum X / m = F / m = 12 / 4 = 3 \text{ м/с}^2.$$

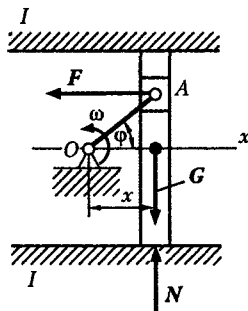


Рис. 13.1

Применим формулу скорости равноускоренного движения

$$v = v_0 + at.$$

Подставив значения, получим

$$v = at = 3 \cdot 10 = 30 \text{ м/с.}$$

Пример 13.4. В результате полученного толчка кирпич начал скользить с начальной скоростью $v_0 = 2 \text{ м/с}$ по неподвижной ленте конвейера, расположенного под углом $\alpha = \pi/6$ рад к горизонту. Определить перемещение s кирпича за промежуток времени $t = 2 \text{ с}$, если коэффициент трения скольжения кирпича о ленту конвейера $f = 0,4$; кирпич считать точечной массой (рис. 13.2).

Решение. Данный пример относится ко второй задаче динамики. Выберем систему координат xOy таким образом, чтобы начало координат было в начальном положении тела, ось x была направлена вдоль ленты конвейера вниз, а ось y — перпендикулярно ленте конвейера вверх. Применяя принцип освобожденности, рассмотрим кирпич как материальную точку, движущуюся вдоль оси x под действием силы тяжести G , нормальной реакции N и силы трения $F_{\text{тр}}$.

Составим уравнения движения материальной точки:

$$\sum X = ma_x; G \sin \alpha - F_{\text{тр}} = \frac{G}{g} a_x; \quad (13.1)$$

$$\sum Y = ma_y; N - G \cos \alpha = \frac{G}{g} a_y. \quad (13.2)$$

Кроме того, на основании второго закона трения скольжения можно записать

$$F_{\text{тр}} = fN. \quad (13.3)$$

Так как материальная точка движется вдоль оси x , то $a_y = 0$, в результате чего из уравнения (13.2) имеем

$$N = G \cos \alpha.$$

Подставив это выражение в уравнение (13.3), получим

$$F_{\text{тр}} = fG \cos \alpha.$$

Полученное выражение подставим в уравнение (13.1):

$$G \sin \alpha - fG \cos \alpha = \frac{G}{g} a_x.$$

Сокращая это равенство на G и учитывая, что $a_x = a$, определим ускорение кирпича:

$$a = g \sin \alpha - gf \cos \alpha.$$

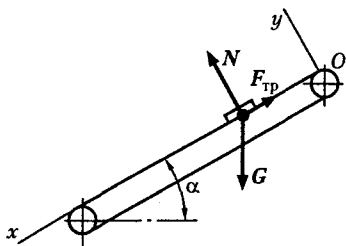


Рис. 13.2

Вынеся $g \cos \alpha$ за скобку, получим

$$a = g \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f).$$

Так как правая часть этого равенства содержит только постоянные величины, то ускорение кирпича — величина постоянная, причем возможны три случая движения:

- 1) если $\operatorname{tg} \alpha > f$, то $a > 0$ и движение будет равноускоренным;
- 2) если $\operatorname{tg} \alpha = f$, то $a = 0$ и движение будет равномерным;
- 3) если $\operatorname{tg} \alpha < f$, то $a < 0$ и движение будет равнозамедленным.

Применив формулу пути равнопеременного движения, определим путь s , пройденный кирпичом за 2 с:

$$\begin{aligned} s &= v_0 t + at^2 / 2 = v_0 t + g \cos(\operatorname{tg} \alpha - f) t^2 / 2 = \\ &= 2 \cdot 2 + 9,81 \cdot 0,886(0,557 - 0,4) 4 / 2 \approx 7 \text{ м.} \end{aligned}$$

При заданных в условии примера значениях $\operatorname{tg} \alpha > f$, т.е. $a > 0$, следовательно, движение кирпича было равноускоренным.

13.3. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту

Рассмотрим материальную точку M массой m , брошенную из точки O поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (рис. 13.3).

Определим движение точки M , считая, что на нее действует только сила тяжести G (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Возьмем начало координат в точке O , ось x направим по горизонтали вправо, а ось y — по вертикали вверх. Составим дифференциальные уравнения движения точки:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg.$$

Сокращая равенства на m , получаем:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \tag{13.4}$$

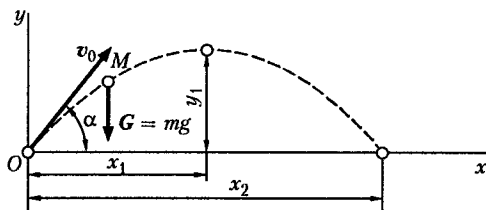


Рис. 13.3

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g. \quad (13.5)$$

Интегрируя уравнение (13.4), находим

$$\frac{dx}{dt} = C_1.$$

По теореме о проекции скорости на координатную ось

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1. \quad (13.6)$$

Следовательно, проекция скорости точки M на ось x все время остается величиной постоянной, равной

$$v_x = v_0 \cos \alpha. \quad (13.7)$$

Из равенств (13.6), (13.7) имеем

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_2.$$

По условию при $t = 0$ $x = 0$, следовательно, произвольная постоянная $C_2 = 0$.

Окончательно

$$x = v_0 t \cos \alpha.$$

Интегрируя уравнение (13.5), находим

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + C_3.$$

Подставив в это уравнение значение $t = 0$, найдем произвольную постоянную

$$C_3 = v_y = v_0 \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2 + C_4.$$

По условию при $t = 0$ $y = 0$, следовательно, произвольная постоянная $C_4 = 0$.

Окончательно

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2.$$

Таким образом, материальная точка M , брошенная со скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется согласно уравнениям

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad (13.8)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2. \quad (13.9)$$

Для определения траектории точки M исключаем из полученных уравнений движения время. Определим время из первого уравнения движения (13.8)

$$t = x / (v_0 \cos \alpha)$$

и подставим его выражение во второе уравнение (13.9), в результате чего получим уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - gx^2 / (2v_0^2 \cos^2 \alpha).$$

Траектория точки M представляет собой параболу с вертикальной осью симметрии.

Определим время полета точки M , для чего во второе уравнение движения подставим значение $y = 0$. Тогда это уравнение примет вид

$$v_0 t \sin \alpha - gt^2/2 = 0.$$

Отсюда находим два значения времени, при которых ордината равна нулю:

$$t_0 = 0; \quad t_2 = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Первое значение времени соответствует началу полета, второе — его концу. Продолжительность полета

$$t_2 - t_0 = t_2 = (2v_0 \sin \alpha)/g.$$

Определим дальность полета, для чего в уравнение движения (13.8) подставим значение времени t_2 :

$$x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = (v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha) / g$$

или

$$x_2 = (v_0^2 \sin 2\alpha) / g.$$

Из этого уравнения видно, что максимальная дальность полета $x_{\max}$ имеет место при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = \pi/4$ рад:

$$x_{\max} = v_0^2 / g.$$

Определим наибольшую высоту подъема точки M , т.е. в тот момент, когда проекция ее скорости на ось ординат окажется равной нулю:

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0.$$

Из равенства определим t_1 :

$$t_1 = (v_0 \sin \alpha) / g = t_2 / 2.$$

Следовательно, наибольший подъем точки имеет место в середине пути полета, т.е. при

$$x_1 = x_2 / 2.$$

Подставив значение t_1 в уравнение (13.9), получим

$$y_1 = (v_0 \sin \alpha \cdot v_0 \sin \alpha) / g - gv_0^2 \sin^2 \alpha / (2g^2),$$

откуда

$$y_1 = v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g).$$

Из этого уравнения видно, что максимальной высоты точка достигает при $\sin \alpha = 1$ или при $\alpha = \pi/2$ рад, т.е. когда точка брошена вертикально вверх:

$$y_{\max} = v_0^2 / (2g).$$

Пример 13.5. При аварии обод маховика паровой машины разорвался на несколько частей, которые отлетели от места аварии на разные расстояния, оставаясь в плоскости вращения маховика. Наибольшее расстояние, на которое отлетели найденные куски, оказалось равным 280 м. Диаметр маховика $D = 3,5$ м. Определить угловую скорость маховика в момент разрыва.

Решение. При рассмотрении вопроса о движении тела, брошенного под углом к горизонту, была получена формула, определяющая максимальную дальность полета:

$$x_{\max} = v_0^2 / g.$$

Из этой формулы определим окружную скорость маховика в момент разрыва:

$$v_0 = \sqrt{gx_{\max}} = \sqrt{9,8 \cdot 280} = 52,4 \text{ м/с.}$$

При диаметре маховика $D = 3,5$ м его угловая скорость в момент разрыва была равна

$$\omega = v_0 / (0,5D) = 52,4 / 1,75 \approx 30 \text{ рад/с.}$$

Следует заметить, что в действительности угловая скорость маховика в момент разрыва была несколько больше, потому что в расчетах сопротивлением воздуха пренебрегли.

Глава 14

ОСНОВЫ КИНЕТОСТАТИКИ

14.1. Метод кинетостатики

Представим себе материальную точку массой m , движущуюся с ускорением a под действием какой-то системы активных и реактивных сил, равнодействующая которых равна F .

Воспользуемся одной из известных нам формул (основным уравнением динамики) для того, чтобы уравнения движения записать в форме уравнений равновесия (метод кинетостатики):

$$F = ma.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$F + (-ma) = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках, обозначается $F^{\text{ин}}$ и называется силой инерции:

$$F^{\text{ин}} = -ma.$$

Сила инерции есть вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный в сторону, противоположную ускорению. Тогда

$$F + F^{\text{ин}} = 0 \text{ или } \sum (F, F^{\text{ин}}) = 0.$$

Это равенство, являющееся математическим выражением принципа, который носит имя французского ученого Ж. Д'Аламбера (1717–1783), можно рассматривать как уравнение равновесия материальной точки. Следует подчеркнуть, что полученное равенство, хотя и названо уравнением равновесия, в действительности является видоизмененным уравнением движения материальной точки.

Следует отметить, что до Д'Аламбера над общим методом, с помощью которого уравнения динамики придается форма уравнений статики, работали члены Петербургской Академии наук Я. Герман (1716) и Л. Эйлер (1737).

Принцип Д'Аламбера формулируется так: *активные и реактивные силы, действующие на материальную точку, вместе с силами*

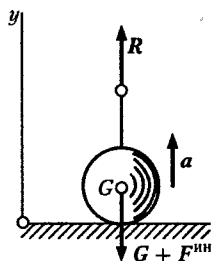


Рис. 14.1

инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющую всем условиям равновесия.

Следует помнить, что сила инерции приложена к рассматриваемой материальной точке условно, но для связи, вызывающей ускорение, она в определенном смысле является реальной. Обладая свойством инерции, всякое тело стремится сохранять свою скорость по модулю и направлению неизменной, в результате чего оно будет действовать на связь, вызывающую ускорение, с силой, равной силе инерции. В качестве примера действия сил инерции можно привести случаи разрушения маховиков при достижении ими критической угловой скорости. Во всяком вращающемся теле действуют силы инерции, так как каждая частица этого тела имеет ускорение, а соседние частицы являются для нее связями.

Поясним это на примере. Пусть к телу (рис. 14.1), лежащему на горизонтальной плоскости, привязана нить, способная выдерживать силу тяжести G этого тела. Если к нити приложить силу R статически (постепенно), то тело будет поднято вверх и нить не оборвется; если силу R приложить динамически (внезапно, рывком), то нить оборвется. Это явление объясняется следующим образом.

Чтобы поднять груз, нужно сообщить ему какое-то ускорение a . Для определения величины натяжения нити применим принцип Д'Аламбера и составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; R - G - F^{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$R = G + F^{\text{ин}} = G + ma.$$

В первом случае грузу сообщается небольшое ускорение и сила инерции, увеличивающая натяжение нити, невелика; во втором случае ускорение, сообщаемое телу, значительное и сила инерции соответственно возрастает. В обоих случаях сила инерции не увеличивает давление на опору, так как приложена к телу условно.

Отметим, что *весом тела* называется сила, с которой тело вследствие притяжения Земли действует на опору (или подвес), удерживающую его от свободного падения. Если тело и опора неподвижны, то вес тела равен его силе тяжести.

Пример 14.1. В поднимающейся кабине лифта взвешивается тело на пружинных весах (сила тяжести тела $G = 50$ Н), натяжение R пружины весов (т.е. вес тела) равно 51 Н. Найти ускорение кабины.

Решение. Применим к телу принцип освобожденности, отбросим пружинные весы и заменим их реакцией R , равной натяжению пружины.

Для решения задачи применим метод кинетостатики, т.е. приложим к телу силу инерции $F^{\text{ин}}$. Составим уравнение равновесия взвешиваемого тела, спроецировав все силы на вертикальную ось y ; предполагаем, что ускорение a кабины направлено вверх и, следовательно, сила инерции направлена вниз (расположение векторов сил см. на рис. 14.1):

$$\sum Y = 0; R - G - F^{\text{ин}} = 0.$$

Модуль силы инерции определяем по формуле

$$F^{\text{ин}} = ma = (G/g)a.$$

Подставив это выражение в уравнение, определим ускорение

$$a = (R - G)g/G = (51 - 50)9,8 / 50 = 0,196 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение получилось положительным, следовательно, как и предполагалось, оно направлено вверх.

14.2. Силы инерции в криволинейном движении

В криволинейном движении точки полное ускорение равно векторной сумме касательного и нормального ускорений (рис. 14.2).

Касательное ускорение $a_\tau = dv/dt$, нормальное ускорение $a_n = v^2/\rho$, полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Каждому ускорению соответствует своя сила инерции:

$F_\tau^{\text{ин}} = m \frac{dv}{dt}$ — касательная, или тангенциальная;

$F_n^{\text{ин}} = mv^2/\rho$ — нормальная, или центробежная;

$F^{\text{ин}} = ma$ — полная.

В качестве примера рассмотрим равномерное движение по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, камня силой тяжести G , привязанного к невесомой нити длиной r , расположенной в той же плоскости (рис. 14.3, а). Чтобы нить оставалась в плоскости движения камня, предполагается, что он скользит по идеальной гладкой горизонтальной плоскости. Скорость камня обозначим v . Тогда $F_n^{\text{ин}} = mv^2/r$ — центробежная сила инерции (эта сила натягивает нить); $R = mv^2/r$ — центростремительная сила, приложенная к камню (эта сила удерживает камень на окружности).

Центробежная и центростремительная силы (действие и противодействие) по третьему закону Ньютона равны по

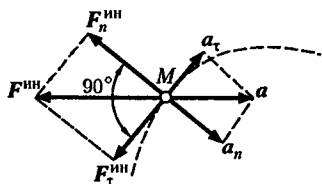


Рис. 14.2

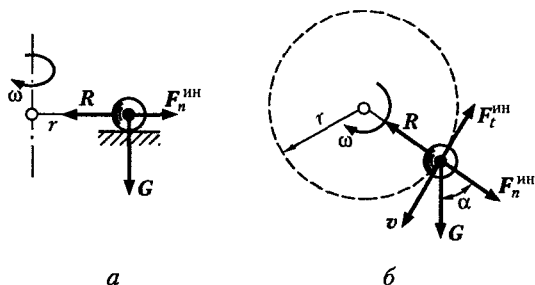


Рис. 14.3

модулю и направлены в противоположные стороны. Очевидно, что касательная сила инерции $F_t^{\text{ин}}$ в этом случае равна нулю, так как $v = \text{const}$.

Из опыта известно, что при достаточной скорости нить может разорваться и камень полетит по касательной к окружности, т.е. по направлению имеющейся в момент разрыва скорости. Это доказывает, что центробежная сила инерции есть реальная сила для связи, но к телу она приложена условно.

Внутри тел, движущихся с ускорением, также возникают внутренние силы инерции, так как для каждой частицы тела соседние частицы являются связями.

Найдем, чему равно натяжение нити, если камень движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости (рис. 14.3, б). Для определения натяжения R нити применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к камню нормальную силу инерции $F_n^{\text{ин}}$ и касательную силу инерции $F_t^{\text{ин}}$.

Спроецируем все силы на направление нити, в результате чего получим

$$R - G \cos \alpha - F_n^{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$R = F_n^{\text{ин}} + G \cos \alpha = mv^2/r + G \cos \alpha.$$

Натяжение нити максимальное при $\alpha = 0$, т.е. когда камень находится в нижнем положении:

$$R_{\text{max}} = mv^2/r + G.$$

Натяжение нити минимальное при $\alpha = \pi$ рад, т.е. когда камень находится в верхнем положении:

$$R_{\text{min}} = mv^2/r - G.$$

Заметим, что под влиянием силы тяжести камня модуль его скорости v будет меняться и достигать наименьшего значения в верхнем положении и наибольшего — в нижнем.

Если выразить линейную скорость камня через угловую скорость нити $v = \omega r$, то формула центробежной силы инерции примет вид

$$F_n^{\text{ин}} = m\omega^2 r.$$

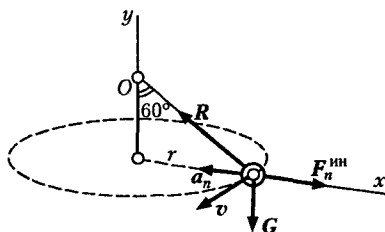


Рис. 14.4

Пример 14.2. Груз весом $G = 10$ Н, подвешенный на нити длиной $l = 0,3$ м в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60° (рис. 14.4). Определить скорость v груза и натяжение R нити.

Решение. Так как нить составляет с вертикалью постоянный угол, то скорость груза постоянна, касательное ускорение груза и касательная сила инерции равны нулю. Применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к грузу центробежную силу инерции $F_n^{\text{ин}}$, реакцию R нити и составим два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; -R \sin 60^\circ + F_n^{\text{ин}} = 0;$$

$$\sum Y = 0; R \cos 60^\circ - G = 0,$$

где

$$F_n^{\text{ин}} = ma_n = \frac{Gv^2}{gr} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin 60^\circ}.$$

Из второго уравнения определим

$$R = \frac{G}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ Н}$$

и подставим в первое уравнение

$$-\frac{G}{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ + \frac{G}{g} \frac{v^2}{l \sin 60^\circ} = 0;$$

откуда

$$v^2 = gl \frac{\sin^2 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 9,8 \cdot 0,3 \frac{0,866^2}{0,5}; \quad v = 2,1 \text{ м/с.}$$

Пример 14.3. Определить скорость v искусственного спутника Земли, движущегося по круговой орбите на высоте $h = 230$ км от поверхности

Земли. Изменением ускорения свободного падения и сопротивлением воздуха пренебречь. Радиус Земли считать равным $R = 6370$ км.

Решение. После того как ракета-носитель вывела спутник массой m на заданную орбиту и сообщила ему скорость v , касательную к орбите, спутник продолжает движение под действием одной лишь силы притяжения Земли. Для определения скорости v спутника применим принцип Д'Аламбера, т.е. приложим к спутнику центробежную силу инерции и составим уравнение равновесия, спроецировав силы на ось, проходящую через спутник и центр Земли:

$$mg - F_n^{\text{ин}} = 0.$$

Так как $F_n^{\text{ин}} = mv^2 / (R + h)$, то

$$mg - mv^2 / (R + h) = 0.$$

Сократив равенство на m , определим скорость спутника:

$$v = \sqrt{g(R + h)}.$$

Подставив значения, получим

$$v = \sqrt{9,81(6370 + 230)1000} = 8000 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с}.$$

Эта скорость, при которой спутник Земли удерживается на круговой орбите на относительно небольшой высоте, называется *первой космической скоростью*.

Пример 14.4. На какую высоту h надо запустить искусственный спутник Земли, предназначенный для сверхдальних телепередач, чтобы он казался неподвижным по отношению к Земле? Орбиту спутника приближенно считать окружностью, концентричной экватору.

Радиус R Земли принять равным 6370 км, а угловую скорость вращения Земли вокруг своей оси — $\omega = 0,7 \cdot 10^{-4}$ рад/с (рис. 14.5).

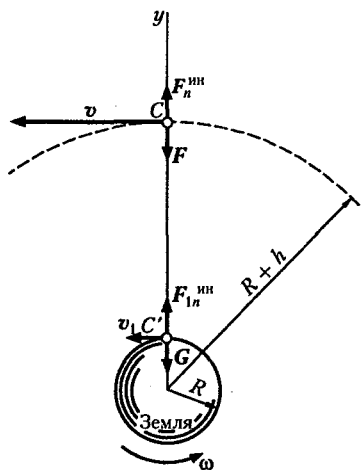


Рис. 14.5

Решение. Введем следующие обозначения: m — масса спутника; G — сила тяжести спутника на поверхности Земли; M — масса Земли; v — скорость движения спутника.

На основании закона всемирного тяготения сила F , с которой спутник притягивается к Земле, на высоте h равна

$$F = \gamma mM / (R + h)^2,$$

где γ — гравитационная постоянная.

При $h = 0$

$$F_1 = G = \gamma mM / R^2.$$

Центробежная сила инерции $F_n^{\text{ин}}$ спутника на высоте h равна

$$F_n^{\text{ин}} = mv^2 / (R + h).$$

На основании принципа Д'Аламбера

$$\sum Y = 0; \quad F_n^{\text{ин}} - F = 0,$$

следовательно,

$$F_n^{\text{ин}} = F \quad \text{или} \quad mv^2 / (R + h) = \gamma mM / (R + h)^2.$$

Так как $v = \omega(R + h)$, то после подстановки и сокращений получим

$$\omega^2 (R + h)^3 = \gamma M. \quad (14.1)$$

Если бы спутник летел на небольшом расстоянии от поверхности Земли, то этим расстоянием можно было бы пренебречь и тогда

$$G = F_1$$

или

$$mg = \gamma mM / R^2.$$

Отсюда

$$gR^2 = \gamma M. \quad (14.2)$$

Из равенств (14.1) и (14.2) получим

$$\omega^2 (R + h)^3 = gR^2,$$

откуда

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{981 \cdot 6370^2 \cdot 10^6}{(0,7 \cdot 10^{-4})^2}} - 6370 \cdot 10^3 \approx 35\,800 \cdot 10^3 \text{ м} = 35\,800 \text{ км}.$$

Глава 15

РАБОТА И МОЩНОСТЬ

15.1. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути

Рассмотрим материальную точку M , к которой приложена сила F . Пусть точка переместилась прямолинейно из положения M_0 в положение M_1 , пройдя путь s (рис. 15.1).

Чтобы установить количественную меру действия силы F на пути s , разложим эту силу на составляющие N и R , направленные соответственно перпендикулярно направлению перемещения и вдоль него. Так как составляющая N не может двигать точку или сопротивляться ее движению в направлении s , то действие силы F на пу-

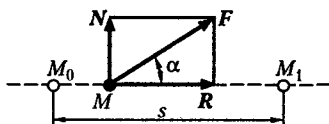


Рис. 15.1

ти s можно определить произведением R_s . Эта новая величина называется *работой* и обозначается W . Следовательно,

$$W = R_s = F_s \cos \alpha,$$

т.е. *работа силы равна произведению ее модуля на путь и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.*

Таким образом, работа является мерой действия силы, приложенной к материальной точке при некотором ее перемещении.

Работа — величина скалярная.

Рассмотрим три частных случая вычисления работы: 1) $\alpha = 0$, в этом случае $W = Fs$; 2) $\alpha = 90^\circ$, в этом случае $W = 0$; 3) $\alpha = 180^\circ$, в этом случае $W = -Fs$.

Итак, работа *положительна*, если направление силы и направление перемещения совпадают (или $\alpha < 90^\circ$); работа *отрицательна*, если направление силы и направление перемещения противоположны (или $\alpha > 90^\circ$); работа *равна нулю*, когда направление силы и направление перемещения взаимно-перпендикулярны. Так, например, при подъеме тела вверх работа силы тяжести отрицательна, при движении вниз — положительна, а при движении по горизонтальной плоскости работа силы тяжести равна нулю.

Силы, совершающие положительную работу, называются *движущими силами*, силы, совершающие отрицательную работу, — *силами сопротивления*.

Единица работы

$$[W] = [F][s] = \text{сила} \times \text{длина} = \text{ньютон} \times \text{метр} = \text{джоуль (Дж)}.$$

Джоуль — это работа силы в один ньютон на пути в один метр (при совпадении направлений силы и перемещения точки ее приложения).

15.2. Работа переменной силы на криволинейном участке пути

На бесконечно малом участке ds криволинейный путь можно считать прямолинейным, а силу — постоянной. Тогда элементарная работа dW на пути ds равна

$$dW = F ds \cos(F, v).$$

Работа на конечном перемещении равна сумме элементарных работ:

$$W = \int_0^s F \cos(F, v) ds.$$

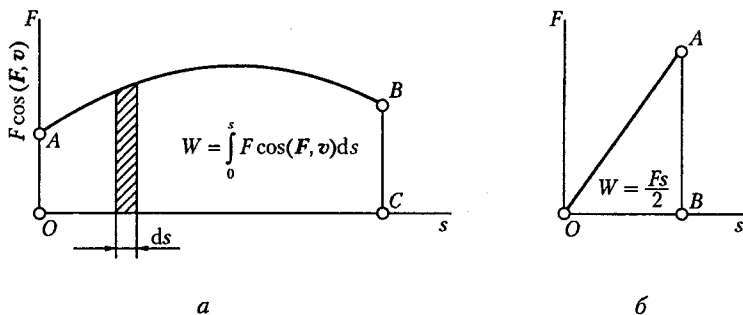


Рис. 15.2

Построим график, выражающий зависимость между $F \cos(F, v)$ и пройденным расстоянием s (рис. 15.2, а).

Площадь заштрихованной полоски, которую можно принять за прямоугольник, равна элементарной работе на пути ds :

$$dW = F \cos(F, v) ds,$$

а работа силы F на конечном пути s графически выражается площадью фигуры $OABC$, ограниченной осью абсцисс, двумя ординатами и кривой AB , которая называется кривой сил.

Если сила совпадает с направлением перемещения и возрастает от нуля пропорционально пути, то работа графически выражается площадью треугольника OAB (рис. 15.2, б) и равняется половине произведения силы на путь:

$$W = Fs / 2.$$

15.3. Теорема о работе равнодействующей

Теорема. Работа равнодействующей системы сил на каком-то участке пути равна алгебраической сумме работ составляющих сил на том же участке пути.

Пусть к материальной точке M приложена система сил ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$), равнодействующая которых равна F_Σ (рис. 15.3).

Система сил, приложенных к материальной точке, есть система сходящихся сил, следовательно,

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n.$$

Спроецируем это векторное равенство на касательную к траектории, тогда

$$F_\Sigma \cos \gamma = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \\ + F_3 \cos \alpha_3 + \dots + F_n \cos \alpha_n.$$

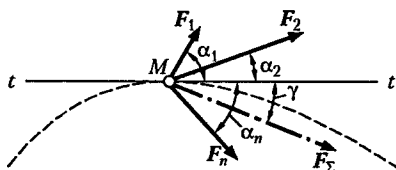


Рис. 15.3

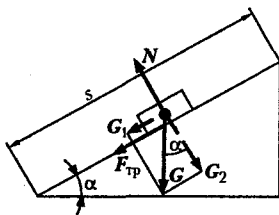


Рис. 15.4

Умножим обе части равенства на бесконечно малое перемещение ds и проинтегрируем это равенство в пределах какого-то конечного перемещения s :

$$\int_0^s F_{\Sigma} \cos \gamma ds = \int_0^s F_1 \cos \alpha_1 ds + \\ + \int_0^s F_2 \cos \alpha_2 ds + \dots + \int_0^s F_n \cos \alpha_n ds,$$

что дает равенство

$$W_{\Sigma} = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots + W_{F_n}$$

или сокращенно

$$W_{\Sigma} = \sum W_{F_i}.$$

Теорема доказана.

Пример 15.1. Вычислить работу, которая производится при равномерном подъеме груза $G = 200$ Н по наклонной плоскости на расстояние $s = 6$ м, если угол, образуемый плоскостью с горизонтом, $\alpha = 30^\circ$, а коэффициент трения скольжения $f = 0,01$ (рис. 15.4).

Решение. Разложим силу тяжести G груза на две взаимно-перпендикулярные составляющие G_1 и G_2 — соответственно параллельную и перпендикулярную наклонной плоскости. Согласно второму закону трения скольжения сила трения $F_{тр}$ равна

$$F_{тр} = fG_2 = fG \cos \alpha.$$

Применив теорему о работе равнодействующей, вычислим искомую работу как сумму работ сил сопротивления (работа силы G_2 и нормальной реакции N равна нулю, так как эти силы перпендикулярны направлению перемещения s):

$$W_{\Sigma} = G_1 s + F_{тр} s = G s \sin \alpha + f G s \cos \alpha.$$

Подставив числовые значения, получим

$$W_{\Sigma} = 200 \cdot 6 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 0,866 = 610,4 \text{ Дж}.$$

15.4. Теорема о работе силы тяжести

Теорема. Работа силы тяжести не зависит от вида траектории и равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения.

Пусть материальная точка M движется под действием одной лишь силы тяжести G и за какой-то промежуток времени перемещается из положения M_1 в положение M_2 , пройдя путь s (рис. 15.5).

На траектории точки M выделим бесконечно малый участок ds , который можно считать прямолинейным, и из его концов проведем прямые, параллельные осям координат, одна из которых вертикальна, а другая горизонтальна. Из заштрихованного треугольника получим, что

$$dy = ds \cos \alpha.$$

Элементарная работа силы G на пути ds равна

$$dW = G ds \cos \alpha.$$

Полная работа на пути s равна

$$W = \int_0^s G ds \cos \alpha = \int_0^h G dy = G \int_0^s dy = Gh.$$

Итак,

$$W = Gh;$$

теорема доказана.

Силы, работа которых не зависит от вида траектории, называются **потенциальными**. К числу таких сил относятся, например, силы тяжести, силы всемирного тяготения, натяжение пружины.

Пример 15.2. Однородный массив $ABCD$ массой $m = 4080$ кг имеет размеры, указанные на рис. 15.6. Определить работу, которую необходимо затратить на опрокидывание массива вокруг ребра D .

Решение. Определим силу тяжести G массива:

$$G = mg = 4080 \cdot 9,81 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} = 40 \text{ кН}.$$

Работа, которую необходимо затратить на опрокидывание массива, равна работе силы сопротивления, т.е. силы тяжести. Для того чтобы опрокинуть массив, необходимо его центр тяжести O (находящийся в геометрическом центре, так как массив однородный) перевести в положение O_1 , после чего массив продолжит опрокидываться под действием силы тяжести, которая превратится из силы сопротивления в движущую силу.

Искомую работу определим, применив теорему о работе силы тяжести:

$$\begin{aligned} W &= G \cdot KO_1 = G(OD - KD) = G(\sqrt{OK^2 + KD^2} - KD) = \\ &= 40 \cdot 10^3 (\sqrt{3^2 + 4^2} - 4) = 40 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 40 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

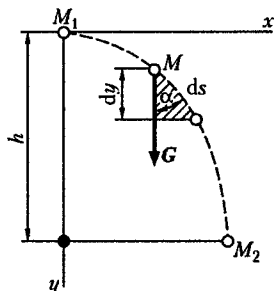


Рис. 15.5

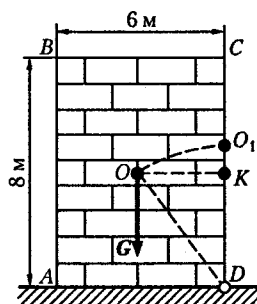


Рис. 15.6

15.5. Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу

Представим себе диск, вращающийся вокруг неподвижной оси под действием постоянной силы F (рис. 15.7), точка приложения которой перемещается вместе с диском. Разложим силу F на три взаимно-перпендикулярные составляющие: F_1 — окружная сила, F_2 — осевая сила, F_3 — радиальная сила. При повороте диска на бесконечно малый угол $d\varphi$ сила F совершит элементарную работу, которая на основании теоремы о работе равнодействующей будет равна сумме работ составляющих. Работа составляющих F_2 и F_3 равна нулю, так как векторы этих сил перпендикулярны бесконечно малому перемещению ds точки приложения M , поэтому элементарная работа силы F равна работе составляющей F_1 :

$$dW = F_1 ds = F_1 R d\varphi.$$

При повороте диска на конечный угол φ работа силы F равна

$$W = \int_0^\varphi F_1 R d\varphi = F_1 R \int_0^\varphi d\varphi = F_1 R \varphi,$$

где угол φ выражается в радианах.

Так как моменты составляющих F_2 и F_3 относительно оси z равны нулю, то на основании теоремы Вариньона момент силы F относительно оси z равен

$$M_z(F) = F_1 R.$$

Момент силы, приложенной к диску, относительно оси вращения называется вращающим моментом и, согласно стандарту ИСО, обозначается T :

$$T = M_z(F),$$

следовательно,

$$W = T\varphi.$$

Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловое перемещение.

Пример 15.3. Рабочий вращает рукоятку лебедки силой $F = 200$ Н, перпендикулярной радиусу вращения. Найти работу, затраченную в течение 25 с, если длина рукоятки $r = 0,4$ м, а ее угловая скорость $\omega = \pi/3$ рад/с.

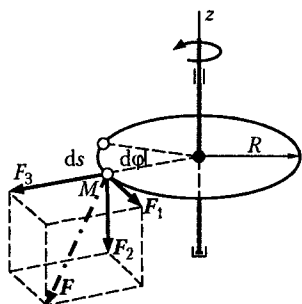


Рис. 15.7

Решение. Прежде всего определим угловое перемещение φ рукоятки лебедки за 25 с:

$$\varphi = \omega t = \frac{\pi}{3} 25 = 26,18 \text{ рад.}$$

Далее воспользуемся формулой для определения работы силы при вращательном движении:

$$W = T\varphi = Fr\varphi.$$

Подставив числовые значения, получим

$$W = 200 \cdot 0,4 \cdot 26,18 \approx 2100 \text{ Дж} = 2,1 \text{ кДж.}$$

15.6. Мощность

Работа, совершаемая какой-то силой, может быть осуществлена за различные промежутки времени. Чтобы охарактеризовать, насколько быстро совершается работа, в механике существует понятие *м о щ н о с т и*, обозначаемой P .

Мощностью силы называется работа, совершаемая в единицу времени.

Если работа совершается равномерно, то мощность определяют по формуле

$$P = W/t.$$

Если направление силы и направление перемещения совпадают, то эту формулу можно записать в иной форме:

$$P = W/t = Fs/t \text{ или } P = Fv.$$

Мощность силы равна произведению модуля силы на скорость точки ее приложения.

Единица мощности

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{работа}}{\text{время}} = \text{джоуль в секунду} = \text{ватт (Вт)}.$$

Если работа совершается силой, приложенной к вращающемуся телу, и притом равномерно, то мощность в этом случае определяют по формуле

$$P = W/t = T\varphi/t \text{ или } P = T\omega.$$

Мощность силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угловую скорость.

Пример 15.4. Посредством ремня передается мощность $P = 14,72 \text{ кВт}$. Диаметр ременного шкива $D = 1000 \text{ мм}$, угловая скорость $\omega = 5\pi \text{ рад/с}$.

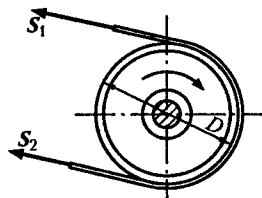


Рис. 15.8

Предполагая натяжение S_1 ведущей ветви ремня вдвое большим натяжения S_2 ведомой ветви, определить S_1 и S_2 (рис. 15.8).

Решение. Разность натяжения ветвей равна силе трения, действующей между ремнем и шкивом, и в данном случае является окружной силой. Вращающий момент, действующий на шкив, равен

$$T = (S_1 - S_2)D / 2 = S_2 D / 2.$$

С другой стороны, вращающий момент можно вычислить, зная передаваемую мощность и угловую скорость:

$$T = P / \omega = 14\,720 / (5\pi) = 936 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Теперь можно определить натяжение S_2 ведомой ветви ремня:

$$S_2 = 2T / D = 2 \cdot 936 / 1 = 1872 \text{ Н}.$$

По условию натяжение ведущей ветви в 2 раза больше натяжения ведомой, следовательно,

$$S_1 = 2S_2 = 2 \cdot 1872 = 3744 \text{ Н}.$$

15.7. Коэффициент полезного действия

Способность тела при переходе из одного состояния в другое совершать работу называется **энергией**.

Энергия есть общая мера различных форм движения материи.

При передаче или преобразовании энергии, а также при совершении работы имеют место потери энергии. В процессе передачи движения или выполнения работы движущие силы механизмов и машин преодолевают силы сопротивления, которые подразделяются на силы полезного сопротивления и силы вредного сопротивления. Потери на преодоление сил вредного сопротивления имеют место во всех механизмах и машинах и вызываются силами трения и силами сопротивления окружающей среды.

Относительное количество энергии, используемой в машине по прямому назначению, характеризуется **коэффициентом полезного действия (КПД)**, который обозначается η .

Коэффициентом полезного действия называется отношение полезной работы (или мощности) к затраченной:

$$\eta = W_{\text{п}} / W_{\text{з}} = P_{\text{п}} / P_{\text{з}}.$$

Если коэффициент полезного действия учитывает только механические потери, то он называется **механическим КПД**.

КПД — всегда правильная дробь, иногда его выражают в процентах:

$$\eta\% = (W_n / W_z)100.$$

Чем ближе КПД к единице, тем экономичнее машина.

Приведем ориентировочные значения КПД для наиболее распространенных механизмов и машин:

Металлообрабатывающие станки	0,8
Кривошипно-ползунный механизм	0,95
Червячная передача	до 0,92
Тепловые двигатели	до 0,40
Турбины	0,95
Электродвигатели	0,92

Если ряд механизмов соединен *последовательно*, т.е. каждый последующий механизм получает движение от ведомого звена предыдущего механизма, то тогда *общий* КПД η равен *произведению* КПД *всех механизмов*:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n,$$

где $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ — КПД каждого механизма в отдельности.

В качестве примера определим КПД шероховатой наклонной плоскости с углом подъема α , когда тело силой тяжести G равномерно поднимается по этой плоскости на высоту h под действием горизонтальной силы F .

Если путь, пройденный телом, обозначить s , то полезная работа $W_n = Gh = Gs \sin \alpha$, а затраченная работа $W_z = Fs \cos \alpha = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \times s \cos \alpha$ (так как из подразд. 6.3 известно, что $F = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$), тогда

$$\eta = W_n / W_z = Gs \sin \alpha / [G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) s \cos \alpha] = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Итак, КПД наклонной плоскости, когда движущая сила горизонтальна, равен

$$\eta = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

где α — угол, который составляет наклонная плоскость с горизонтом; φ — угол трения.

Нетрудно убедиться, что КПД наклонной плоскости растет с увеличением угла ее наклона.

По такой же формуле определяется КПД при работе винта и гайки с прямоугольной резьбой (например, в домкрате). КПД винтовой пары с трапецеидальной или треугольной резьбой

$$\eta = \operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg}(\psi + \varphi'),$$

где ψ — угол подъема винтовой линии резьбы; φ' — приведенный угол трения.

Глава 16

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

16.1. Теорема об изменении количества движения

Общие теоремы динамики материальной точки устанавливают зависимость между изменением динамических мер движения материальной точки и мерами действия сил, приложенных к этой точке.

Количество движения mv материальной точки называется вектор, равный произведению массы точки на ее скорость и имеющий направление скорости. Количество движения есть динамическая мера движения материальной точки.

Единица количества движения

$$[mv] = [m][v] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Импульсом Ft постоянной силы F называется вектор, равный произведению силы на время ее действия. Импульс силы есть мера ее действия во времени.

Единица импульса силы

$$[Ft] = [F][t] = [m][a][t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2)\text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Количество движения и импульс силы выражаются в одинаковых единицах, связь между ними устанавливает **теорема об изменении количества движения**, формулируемая так: *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно импульсу приложенной к ней силы за тот же промежуток времени.*

Докажем эту теорему для случая прямолинейного движения материальной точки под действием постоянной силы F , в этом случае движение будет равнопеременным, формула скорости которого записывается так:

$$v = v_0 + at.$$

Перенесем v_0 в левую часть и умножим обе части равенства на массу m материальной точки:

$$mv - mv_0 = mat.$$

Но произведение массы точки на ее ускорение есть сила, под действием которой точка движется, следовательно,

$$mv - mv_0 = Ft.$$

В левой части равенства имеем изменение количества движения за время t , а в правой — импульс силы за тот же промежуток времени, что и требовалось доказать.

Если движение замедленное ($v < v_0$), то вектор силы направлен в сторону, противоположную вектору скорости, и, следовательно, в последнюю формулу силу надо подставлять с отрицательным знаком.

В случае криволинейного движения материальной точки под действием переменной по модулю и направлению силы весь промежуток времени t можно разбить на бесконечно малые промежутки, в пределах которых вектор силы можно считать постоянным, а путь — прямолинейным, тогда импульс силы за конечный промежуток времени t будет равен сумме элементарных импульсов. В этом случае математическое выражение теоремы об изменении количества движения приобретает следующий вид:

$$mv - mv_0 = \int_0^t F dt.$$

Если к материальной точке приложено несколько постоянных сил, то изменение количества движения будет равно сумме (алгебраической, если силы действуют по одной прямой, или векторной, если силы действуют под углом друг к другу) импульсов данных сил:

$$mv - mv_0 = \sum (F_i t).$$

Пример 16.1. Тело спускается без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$ (рис. 16.1). Определить время t , в течение которого скорость движения тела достигнет 13,9 м/с. Коэффициент трения скольжения $f = 0,25$.

Решение. Рассмотрим тело как материальную точку, движущуюся под действием силы тяжести G , силы трения $F_{\text{тр}}$ и нормальной реакции N наклонной плоскости.

Разложим силу тяжести G на составляющие G_1 и G_2 , одна из которых перпендикулярна, а другая параллельна наклонной плоскости, и применим теорему об изменении количества движения:

$$mv - mv_0 = \sum (F_i t).$$

Спроецируем это векторное равенство на направление наклонной плоскости, в результате чего получим

$$mv - mv_0 = G_2 t - F_{\text{тр}} t.$$

Применив второй закон трения скольжения и подставив значения, получим

$$Gv / g = (G \sin \alpha - f G \cos \alpha) t,$$

откуда

$$t = v / [g(\sin \alpha - f \cos \alpha)] = 13,9 / [9,81(0,5 - 0,25 \cdot 0,866)] = 5 \text{ с}.$$

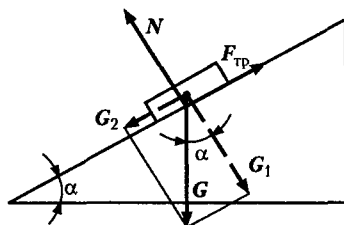


Рис. 16.1

16.2. Теорема об изменении кинетической энергии

Механической энергией называют энергию перемещения и взаимодействия тел. Механическая энергия бывает двух видов: кинетическая и потенциальная.

Кинетической энергией, или энергией движения, называется энергия, которой обладает всякая материальная точка при движении. Кинетическая энергия есть динамическая мера движения материальной точки.

Кинетическая энергия материальной точки равна половине произведения массы точки на квадрат ее скорости:

$$K = mv^2/2.$$

Кинетическая энергия — величина скалярная и всегда положительная.

Единица кинетической энергии:

$$[K] = [mv^2] = [m] [v^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кинетическая энергия имеет размерность работы. Связь между кинетической энергией и работой устанавливает **теорема об изменении кинетической энергии**, формулируемая так: *изменение кинетической энергии материальной точки на некотором пути равно работе силы, приложенной к точке, на том же пути.*

Докажем эту теорему для самого общего случая движения материальной точки, т.е. для случая криволинейного движения под действием переменной силы (рис. 16.2). Запишем для этой точки основное уравнение динамики:

$$ma = F,$$

где m — масса точки; a — полное ускорение точки; F — действующая на точку сила.

Спроецируем это векторное равенство на направление скорости v точки:

$$ma \cos \alpha = F_{\tau} = F \cos \alpha.$$

Как известно из кинематики,

$$a \cos \alpha = a_{\tau} = \frac{dv}{dt},$$

следовательно,

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha.$$

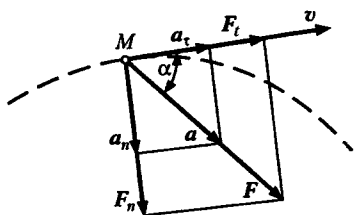


Рис. 16.2

Умножив обе части равенства на бесконечно малое перемещение ds , получим

$$m \frac{dv}{dt} ds = F \cos \alpha ds.$$

Выражение, стоящее в левой части равенства, преобразуем следующим образом:

$$m \frac{dv}{dt} ds = m dv \frac{ds}{dt} = m v dv,$$

следовательно,

$$m v dv = F \cos \alpha ds,$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах для скорости от v_0 до v и для пути от 0 до s :

$$m \int_{v_0}^v v dv = \int_0^s F \cos \alpha ds,$$

получаем

$$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = W,$$

где W — работа силы F на пути s .

Теорема доказана.

При замедленном движении ($v < v_0$) составляющая F_v , вызывающая касательное ускорение a_v , будет направлена в сторону, противоположную направлению вектора скорости v , и работа силы F будет отрицательной.

Составляющая F_n , вызывающая нормальное ускорение a_n , работы не совершает, так как эта составляющая в каждый данный момент перпендикулярна элементарному перемещению точки приложения силы F .

Если к материальной точке приложено несколько сил, то изменение кинетической энергии равно алгебраической сумме работ этих сил:

$$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = \sum W_i.$$

Пример 16.2. Главную часть прибора для испытания материалов ударом составляет стальная тяжелая отливка M , прикрепленная к стержню, который может вращаться почти без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 16.3). Пренебрегая массой стержня, рассматриваем отливку M как материальную

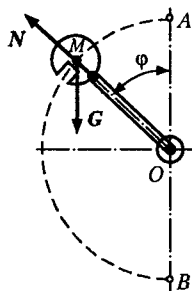


Рис. 16.3

точку, для которой расстояние $MO = 0,918$ м. Определить скорость v этой точки в наинизшем положении B , если она падает из наивысшего положения A с ничтожно малой начальной скоростью.

Решение. Обозначим силу тяжести отливки G . Применив принцип освобожденности и теорему об изменении кинетической энергии и рассматривая отливку как материальную точку, на которую действуют сила тяжести G и реакция N стержня, направленная вдоль стержня, получим

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = W_G + W_N.$$

Согласно теореме о работе силы тяжести, имеем

$$W_G = G \cdot AB = G \cdot 2MO.$$

Работа реакции N равна нулю, так как момент этой силы относительно оси вращения стержня равен нулю. Силой трения, по условию, пренебрегаем.

Подставим это выражение работы в первую формулу и, учитывая, что $v_0 = 0$, получим

$$Gv^2/(2g) = G \cdot 2MO.$$

Сократим обе части равенства на G и подставим числовые значения, тогда

$$v = \sqrt{2MO \cdot 2g} = 2\sqrt{0,981 \cdot 9,81} = 6,2 \text{ м/с}.$$

Пример 16.3. По рельсам, проложенным по пути AB и образующим затем петлю радиусом r , катится вагонетка M силой тяжести G (рис. 16.4). С какой высоты H нужно пустить вагонетку без начальной скорости, чтобы она могла пройти всю окружность кольца, не отделяясь от него?

Решение. Рассмотрим вагонетку как материальную точку. Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии на пути ABC :

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = W_G + W_N,$$

причем работа W_N нормальной реакции N рельсов равна нулю.

На основании теоремы о работе силы тяжести

$$W_G = G(H - 2r).$$

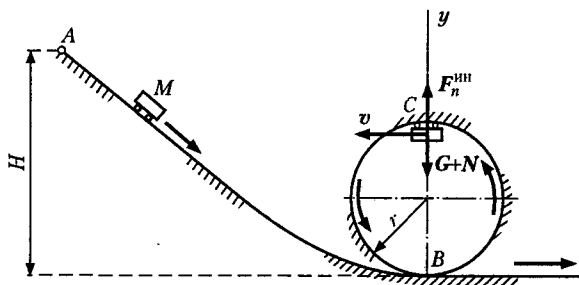


Рис. 16.4

Так как по условию $v_0 = 0$, а $m = G/g$, то, подставив эти выражения в первую формулу, получим

$$Gv^2 / (2g) = (H - 2r)G,$$

откуда

$$v^2 = 2g(H - 2r). \quad (16.1)$$

Далее применим принцип Д'Аламбера. Приложим к вагонетке центробежную силу инерции $F_n^{\text{ин}} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{r}$, спроецируем действующие на вагонетку силы на ось y и составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; F_n^{\text{ин}} - G - N = 0,$$

где N — реакция рельсов.

Очевидно, что наименьшее значение центробежной силы $F_n^{\text{ин}}$, при котором вагонетка не отделится от рельсов, будет при $N = 0$. При этом

$$F_n^{\text{ин}} - G = 0 \text{ или } (G/g)(v^2/r) = G,$$

откуда

$$v^2 = gr. \quad (16.2)$$

Сравнивая выражения (16.1) и (16.2) и приравняв их правые части, получим

$$2g(H - 2r) = gr,$$

откуда

$$H = 2,5r.$$

Очевидно, что значение высоты H , найденное из этого выражения, минимально.

Обратим внимание на то, что при решении не учитываются силы трения и сопротивления воздуха. Поэтому для выполнения мертвой петли практически необходимо, чтобы $H > 2,5r$.

16.3. Закон сохранения механической энергии

Энергию взаимодействия между телами называют потенциалом. Потенциальной энергией обладают, например, натянутый лук со стрелой или сжатая пружина.

Всякая материальная точка, поднятая на определенную высоту h , также обладает некоторой энергией, которая называется энергией положения и является потенциальной энергией. Мерой потенциальной энергии в этом случае служит работа, которую производит точка при свободном падении.

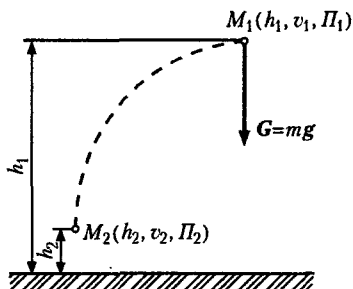


Рис. 16.5

Полагая величину h небольшой по сравнению с размерами Земли, а поэтому считая постоянной силу тяжести G , получим выражение для потенциальной энергии Π :

$$\Pi = Gh.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого на определенную высоту, есть величина относительная, зависящая от системы отсчета, по отношению к которой вычисляется эта энергия.

Пусть материальная точка массой m , падая под действием одной лишь силы тяжести G , в положении M_1 находилась на высоте h_1 , имела скорость v_1 и обладала потенциальной энергией Π_1 (рис. 16.5). В положении M_2 точка оказалась на высоте h_2 , причем ее скорость стала v_2 , а потенциальная энергия Π_2 .

При падении точки под действием одной лишь силы тяжести совершается работа

$$W = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Согласно теореме, доказанной в предыдущем подразделе, эта работа равна изменению кинетической энергии:

$$W = mv_2^2 / 2 - mv_1^2 / 2 = K_2 - K_1$$

или

$$\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1,$$

следовательно,

$$\Pi_1 + K_1 = \Pi_2 + K_2$$

или

$$\Pi + K = \text{const.}$$

Это равенство является математическим выражением закона сохранения механической энергии, который формулируется так: *при движении материальной точки под действием одной лишь силы тяжести сумма потенциальной и кинетической энергий есть величина постоянная.*

На основании закона сохранения механической энергии нетрудно доказать, что если тело бросить с поверхности Земли вертикально вверх, то его кинетическая энергия в нижнем положении будет равна потенциальной энергии в наивысшем положении.

Этот закон справедлив при движении под действием любой потенциальной силы; при действии же непотенциальных сил (напри-

мер, силы трения) механическая энергия переходит в другие виды энергии.

Закон сохранения механической энергии является частным случаем общего закона сохранения материи и энергии, сформулированного М. В. Ломоносовым (1711–1765). Установление этого закона — одно из величайших для своего времени открытий Ломоносова.

Ранее, в подразд. 9.1, говорилось о теории относительности, созданной в начале XX в. А. Эйнштейном.

Одним из важнейших выводов теории относительности является закон пропорциональности энергии и массы тела. Математическое выражение этого закона имеет следующий вид:

$$E = mc^2,$$

где E — полный запас энергии тела (включающий в себя механическую, тепловую, химическую, электромагнитную, ядерную энергию, а также энергию частиц, входящих в состав атома); m — масса тела; c — скорость света.

На основании приведенного выше равенства, называемого формулой Эйнштейна, нетрудно подсчитать, что одному грамму массы соответствует 25 млн кВт·ч энергии ($1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$).

Формула Эйнштейна имеет самое непосредственное отношение к открытию и использованию ядерной (атомной) энергии. Именно на основании этой формулы было установлено существование огромных запасов новых видов энергии и найдены пути ее использования. В 1954 г. в нашей стране была введена в строй первая в мире электростанция на атомной энергии мощностью 5000 кВт.

Пример 16.4. Материальная точка брошена с Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: 1) высоту h максимального подъема точки; 2) скорость v , которую будет иметь точка на высоте $h/2$ при падении.

Решение. Для решения первой части задачи запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии в момент начала движения:

$$K_1 = mv_0^2 / 2; \quad \Pi_1 = 0$$

и в момент максимального подъема:

$$K_2 = 0; \quad \Pi_2 = mgh,$$

где m — масса материальной точки.

Согласно закону сохранения механической энергии

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2$$

или

$$mv_0^2 / 2 = mgh.$$

Сократив обе части равенства на m , определим высоту h максимального подъема точки:

$$h = v_0^2 / (2g).$$

Для решения второй части задачи запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий на высоте $h/2$:

$$K_3 = mv^2/2; \quad \Pi_3 = mgh/2.$$

Согласно закону сохранения механической энергии

$$K_2 + \Pi_2 = K_3 + \Pi_3$$

или

$$mgh = mv^2 / 2 + mgh / 2.$$

Сократив обе части равенства на m , определим скорость:

$$v = \sqrt{gh}.$$

Подставив найденное ранее значение h , получим

$$v = \sqrt{gv_0^2 / (2g)} = v_0 / \sqrt{2}.$$

Глава 17

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

17.1. Уравнение поступательного движения твёрдого тела

Механической системой материальных точек называется совокупность материальных точек, каким-то образом связанных между собой. Всякое твердое тело можно считать неизменяемой механической системой материальных точек.

Силы взаимодействия точек данной системы называются *внутренними*; силы, с которыми действуют на данную систему другие точки, не входящие в эту систему, — *внешними*.

Пусть твердое тело массой m движется под действием силы $\mathbf{F}$ поступательно с ускорением $\mathbf{a}$ (рис. 17.1).

Разобьем тело на ряд материальных точек с массами m_i и применим принцип Д'Аламбера (заметим, что внутренние силы в уравнения равновесия не входят, так как на основании третьего закона Ньютона их сумма для системы в целом равна нулю). К каждой ма-

териальной точке приложим силу инерции $F_i^{\text{ин}} = -m_i a$ и составим уравнение равновесия:

$$\sum X = 0; \quad F - \sum F_i^{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$F = \sum F_i^{\text{ин}} = \sum (m_i a).$$

Так как при поступательном движении все точки тела имеют одинаковые ускорения, то a можно вынести за знак суммы, т. е.

$$F = a \sum m_i = am.$$

Согласно второму закону Ньютона векторы силы F и ускорения a совпадают по направлению, поэтому можно записать

$$F = ma.$$

Это и есть уравнение поступательного движения твердого тела.

Это уравнение ничем не отличается от основного уравнения динамики точки, следовательно, все формулы динамики точки применимы для тела, движущегося поступательно.

17.2. Уравнение вращательного движения твердого тела

Пусть твердое тело под действием системы сил вращается вокруг неподвижной оси z с угловым ускорением α (рис. 17.2).

Разобьем тело на ряд материальных точек с массами m_i и применим принцип Д'Аламбера.

К каждой материальной точке приложены касательная и нормальная силы инерции. Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_z = 0;$$

$$\sum M_z(F_i) - \sum M_z(F_{ci}^{\text{ин}}) = 0.$$

Моменты реакций подшипника и подпятника, а также сил $F_{ni}^{\text{ин}}$ относительно оси z равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось; сумма моментов внешних сил относительно оси вращения называется вращающим моментом. Тогда

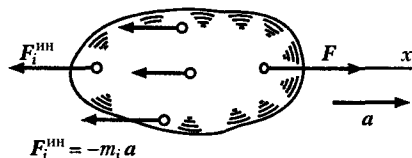


Рис. 17.1

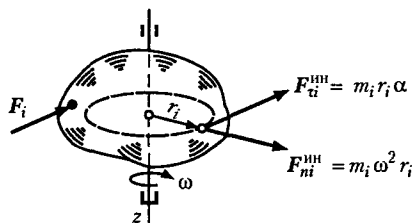


Рис. 17.2

$$\sum M_z(F_i) = T = \sum M_z(F_i^{\text{ин}}) = \sum (m_i r_i^2 \alpha) = \alpha \sum (m_i r_i^2).$$

Выражение $\sum (m_i r_i^2)$ называют моментом инерции тела относительно оси и обозначают J :

$$J = \sum (m_i r_i^2).$$

Момент инерции тела относительно оси есть сумма произведений масс материальных точек, составляющих это тело, на квадрат расстояний от них до этой оси.

В результате получаем формулу

$$T = J\alpha,$$

которая называется уравнением вращательного движения твердого тела. В этой формуле J — момент инерции тела относительно оси вращения.

Единица момента инерции

$$[J] = [mr^2] = [m][r^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Поясним более подробно новое понятие момента инерции тела.

Рассмотрим следующий пример.

Пусть требуется сообщить двум одинаковым шарам (рис. 17.3) одинаковое угловое ускорение α . Так как $r_1 > r_2$, то $J_1 > J_2$. Опытным путем, а также с помощью уравнения вращательного движения можно убедиться в том, что для сообщения этим системам одинакового углового ускорения α потребуется приложить разные вращающие моменты:

$$T' = J_1 \alpha; \quad T'' = J_2 \alpha.$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$T' / T'' = J_1 / J_2.$$

Следовательно, чем больше момент инерции тела, тем больший вращающий момент надо приложить, чтобы сообщить телу заданное угловое ускорение.

Из изложенного ясно, что момент инерции играет во вращательном движении такую же роль, какую масса играет в поступательном движении, следовательно, *момент инерции есть мера инертности вращающегося тела.*

В качестве примера определим момент инерции тонкого однородного сплошного диска, радиус которого R , толщина s , масса m ,

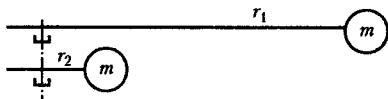


Рис. 17.3

относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр O (рис. 17.4).

Разобьем диск на элементарные кольца переменного радиуса r , шириной dr и толщиной s . Согласно определению момент инерции такого кольца равен

$$dJ = d\sum(m_i r^2) = r^2 d\sum m_i = r^2 dm = \\ = r^2 \cdot 2\pi r dr sp = 2\pi sp r^3 dr,$$

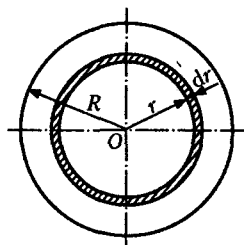


Рис. 17.4

где ρ — плотность материала диска.

Просуммировав моменты инерции всех элементарных колец, получим момент инерции всего диска:

$$J = \int_0^R 2\pi sp r^3 dr = 2\pi sp \int_0^R r^3 dr = 2\pi sp \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \pi sp \frac{R^4}{2}.$$

Так как масса диска $m = \pi R^2 sp$, то

$$J = mR^2 / 2.$$

Нетрудно понять, что момент инерции однородного сплошного прямого кругового цилиндра радиусом R и массой m любой высоты определяют по такой же формуле. Чтобы убедиться в этом, достаточно мысленно разбить весь цилиндр плоскостями, параллельными основанию, на тонкие диски и просуммировать моменты инерции всех дисков.

Моменты инерции для некоторых других однородных тел определяются по формулам, которые приведем без выводов:

1) шар массой m , радиусом R относительно диаметра

$$J = \frac{2}{5} mR^2;$$

2) тонкий стержень массой m , длиной l относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец,

$$J = ml^2 / 3;$$

3) тонкая сферическая оболочка массой m , радиусом R относительно диаметра

$$J = 2mR^2 / 3;$$

4) пустотелый вал массой m , наружным радиусом R и радиусом отверстия r относительно оси

$$J = m(R^2 + r^2) / 2.$$

Момент инерции J_z тела относительно какой-либо оси z , параллельной центральной (т.е. проходящей через центр тяжести C тела), равен сумме центрального момента инерции J_C и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между этими осями:

$$J_z = J_C + ma^2.$$

Из этой формулы, которую также даем без вывода, следует, что из всех моментов инерции тела относительно параллельных осей наименьшим будет момент инерции относительно центральной оси, т.е. центральный момент инерции.

Иногда момент инерции определяют по формуле

$$J = mr_n^2,$$

где r_n — радиус инерции тела;

$$r_n = \sqrt{J/m}.$$

Физический смысл радиуса инерции следующий: если массу тела сосредоточить в одной точке (такая масса называется приведенной) и разместить ее от оси вращения на расстоянии, равном радиусу инерции, то момент инерции приведенной массы будет равен моменту инерции данного тела относительно той же оси.

Удвоенный радиус инерции называется диаметром инерции:

$$D_n = 2r_n.$$

В практике иногда вместо момента инерции пользуются понятием махового момента GD_n^2 .

Маховым моментом называется произведение силы тяжести G вращающегося тела на квадрат его диаметра инерции.

Единица махового момента

$$[GD_n^2] = [G] \cdot [D_n^2] = \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Между маховым моментом и моментом инерции существует простая зависимость:

$$GD_n^2 = mg(2r_n)^2 = 4gmr_n^2$$

или

$$GD_n^2 = 4gJ = 3924J.$$

Пример 17.1. Тонкий однородный стержень силой тяжести G , длиной $l = 150$ мм совершает колебательное движение в вертикальной плоскости под действием силы тяжести; точка подвеса совпадает с концом стержня (рис. 17.5). Определить угловое ускорение стержня в тот момент, когда он составляет с вертикалью угол $\gamma = \pi/6$ рад.

Решение. По условию задачи стержень однородный, следовательно, его центр тяжести находится посередине. Применим уравнение вращательного движения тела

$$T = J\alpha.$$

Вращающий момент равен моменту силы тяжести относительно оси вращения стержня:

$$T = (Gl/2) \sin \gamma.$$

Момент инерции стержня вычислим по формуле

$$J = ml^2/3 = (G/g)(l^2/3).$$

Подставим выражения вращающего момента и момента инерции в уравнение вращательного движения:

$$(Gl/2) \sin \gamma = (G/g)(l^2/3) \alpha$$

и определим угловое ускорение:

$$\alpha = 3g \sin \gamma / (2l) = 3 \cdot 9,81 \cdot 0,5 / (2 \cdot 0,15) = 49,05 \text{ рад/с}^2.$$

Пример 17.2. Маховой момент ротора электродвигателя равен $2,7 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$. Вращающий момент $T = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить время разгона, если конечная скорость вращения ротора $\omega = 30\pi \text{ рад/с}$.

Решение. Так как на ротор действует постоянный вращающий момент, то движение ротора будет равноускоренным. Запишем уравнение угловой скорости этого движения, учитывая, что $\omega_0 = 0$:

$$\omega = \alpha t = 30\pi,$$

откуда

$$\alpha = 30\pi/t \text{ [рад/с}^2\text{]}.$$

Далее применим уравнение вращательного движения ротора

$$T = J\alpha = J \cdot 30\pi / t.$$

Из этого равенства определим время разгона, выразив момент инерции ротора через маховой момент, который равен $4gJ$:

$$t = J \cdot 30\pi / T = [4gJ / (4gT)] 30\pi = [2,7 / (4 \cdot 9,81 \cdot 40)] 30\pi = 0,162 \text{ с}.$$

17.3. Кинетическая энергия твердого тела

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек, составляющих это тело:

$$K = \sum (m_i v_i^2) / 2.$$

Определим выражения для кинетической энергии твердого тела для трех случаев движения.

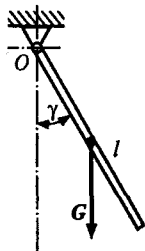


Рис. 17.5

1. Тело движется поступательно. Учитывая, что в случае поступательного движения все точки тела имеют одинаковые скорости, запишем

$$K_{\text{пост}} = \sum (m_i v_i^2) / 2 = (v^2 / 2) \sum m_i \quad \text{или} \quad K_{\text{пост}} = mv^2 / 2.$$

Следовательно, в случае *поступательного движения твердого тела его кинетическая энергия вычисляется по той же формуле, что и кинетическая энергия материальной точки.*

2. Тело вращается вокруг неподвижной оси. Запишем

$$K_{\text{вр}} = \sum (m_i v_i^2) / 2 = \sum [m_i (\omega r_i)^2] / 2 = (\omega^2 / 2) \sum (m_i r_i^2)$$

или

$$K_{\text{вр}} = J\omega^2 / 2.$$

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

3. Тело движется плоскопараллельно. Как известно из кинематики, сложное плоскопараллельное движение твердого тела в каждый данный момент можно считать простейшим вращательным движением вокруг мгновенной оси (метод мгновенных центров скоростей). Допустим, что известна скорость v_C центра тяжести тела, тогда мгновенная угловая скорость

$$\omega = v_C / OC,$$

где OC — расстояние центра тяжести C тела от мгновенной оси вращения O .

Момент инерции J_O относительно мгновенной оси вращения определяют по формуле

$$J_O = J_C + mOC^2,$$

где J_C — момент инерции относительно центральной оси, или центральный момент инерции.

Кинетическую энергию тела, движущегося плоскопараллельно, определяют следующим образом:

$$K_{\text{пл}} = \frac{J_O \omega^2}{2} = (J_C + mOC^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{mOC^2}{2} \frac{v_C^2}{OC^2}$$

или

$$K_{\text{пл}} = mv_C^2 / 2 + J_C \omega^2 / 2.$$

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося плоскопараллельно, равна сумме кинетических энергий в поступательном движении вместе с центром тяжести и вращательном движении вокруг центральной оси, перпендикулярной основной плоскости.

В заключение сформулируем **теорему об изменении кинетической энергии системы тел**: изменение кинетической энергии системы тел при некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех внешних (активных и реактивных) и внутренних сил, действовавших на систему при указанном перемещении:

$$\sum K - \sum K_0 = \sum W.$$

Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий каждого тела в отдельности. Если тело твердое, то сумма работ его внутренних сил равна нулю. При некоторых связях, называемых идеальными, работа реактивных сил равна нулю.

17.4. Сравнение формул динамики для поступательного и вращательного движений твердого тела

Сравнивая формулы динамики точки или поступательно движущегося тела с формулами вращательного движения тела, легко заметить, что эти формулы по структуре аналогичны. Чтобы из формул поступательного движения получить формулы вращательного движения, необходимо вместо силы подставить вращающий момент, вместо линейного перемещения — угловое перемещение, вместо линейной скорости — угловую скорость, вместо линейного ускорения — угловое ускорение, а вместо массы — момент инерции тела относительно оси вращения.

Сравнение формул поступательного и вращательного движений удобно провести с помощью табл. 17.1.

Таблица 17.1

Сравнительные уравнения и динамические меры	Виды движения	
	Поступательное	Вращательное
Уравнение движения	$F = ma$	$T = J\alpha$
Работа	$W = Fs$	$W = T\varphi$
Мощность	$P = Fv$	$P = T\omega$
Кинетическая энергия	$K = mv^2/2$	$K = J\omega^2/2$

Пример 17.3. Определить кинетическую энергию колеса радиусом r , массой m , катящегося по прямолинейному рельсу без скольжения, если

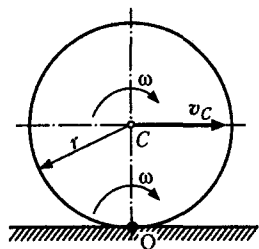


Рис. 17.6

скорость центра тяжести C колеса равна v_C . Колесо считать сплошным однородным цилиндром (рис. 17.6).

Решение. Решим данный пример двумя способами. Как известно из кинематики, сложное плоскопараллельное движение колеса можно рассматривать либо как простейшее вращательное движение вокруг мгновенной оси O с угловой скоростью ω (метод мгновенных центров скоростей), либо как сложное движение, состоящее из поступательного движения со скоростью v_C и относительного вращательного движения вокруг оси C (метод разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное). Напомним, что абсолютная (мгновенная) и относительные угловые скорости колеса всегда равны между собой.

1. Метод мгновенных центров скоростей. В этом случае кинетическую энергию колеса определяют по формуле

$$K = J_O \omega^2 / 2,$$

где J_O — момент инерции колеса относительно мгновенной оси вращения O .

Момент инерции относительно оси O

$$J_O = J_C + mr^2.$$

Момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его геометрической оси вычисляют по формуле

$$J_C = mr^2 / 2,$$

следовательно,

$$J_O = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Теперь определим кинетическую энергию колеса:

$$K = \frac{J_O \omega^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2 \frac{1}{2} \left(\frac{v_C}{r} \right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

2. Метод разложения плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное. В этом случае кинетическая энергия колеса равна сумме кинетических энергий в поступательном и вращательном движениях:

$$K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{v_C}{r} \right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

Пример 17.4. Груз Q , опускаясь, вращает однородный цилиндр, сила тяжести которого G , а радиус r (рис. 17.7). Пренебрегая трением на оси цилиндра, найти натяжение S нити, угловую скорость ω и ускорение α

цилиндра, когда груз Q опустится на расстояние h . Вначале система находилась в покое.

Решение. Для решения задачи расчленим систему на две части и рассмотрим отдельно поступательное движение груза и вращательное движение цилиндра. Так как на систему действуют постоянные силы, то груз и цилиндр будут двигаться с постоянными ускорениями a (груз) и α (цилиндр).

Линейное ускорение a груза равно касательному ускорению точек, лежащих на поверхности цилиндра:

$$a = \alpha r = \text{const},$$

где α — угловое ускорение цилиндра.

По условию начальная скорость $v_0 = 0$, а конечную скорость груза, прошедшего путь h с постоянным ускорением a , определим из формулы кинематики:

$$h = (v^2 - v_0^2) / (2a),$$

откуда

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2\alpha r h}.$$

Далее воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки и применим ее к грузу, движущемуся поступательно:

$$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = W.$$

Подставив выражения массы, скорости и работы, получим

$$(Q / g)(2\alpha r h / 2) = (Q - S)h,$$

откуда реакция S нити

$$S = Q - Q\alpha r / g.$$

Далее запишем уравнение вращательного движения цилиндра:

$$T = J\alpha.$$

Вращающий момент

$$T = Sr = (Q - Q\alpha r / g)r,$$

а момент инерции цилиндра определим по формуле

$$J = mr^2 / 2 = Gr^2 \alpha / (2g).$$

Подставив эти выражения в уравнение вращательного движения, получим

$$(Q - Q\alpha r / g)r = Gr^2 \alpha / (2g),$$

откуда определим угловое ускорение цилиндра:

$$\alpha = 2Qg / [r(G + 2Q)].$$

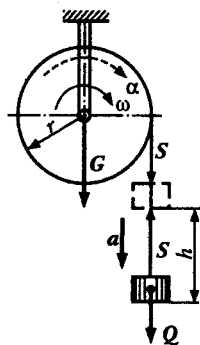


Рис. 17.7

Теперь можно определить угловую скорость цилиндра:

$$\omega = v / r = \sqrt{2\alpha r h} / r.$$

Подставив значение углового ускорения, получим

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2rh \frac{2Qg}{r(G+2Q)}},$$

откуда

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G+2Q}}.$$

В заключение определим угловую скорость цилиндра с помощью теоремы об изменении кинетической энергии системы тел. Учитывая, что вначале система находилась в покое и работа силы тяжести цилиндра равна нулю (точка ее приложения не перемещается), пренебрегая трением, будем иметь

$$K_G + K_Q = W_Q,$$

где

$$K_G = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{Gr^2}{g \cdot 2} \frac{\omega^2}{2}; \quad K_Q = \frac{Q(\omega r)^2}{g \cdot 2}; \quad W_Q = Qh.$$

Подставив значения, получим

$$Gr^2\omega^2 / (4g) + Qr^2\omega^2 / (2g) = Qh,$$

откуда

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G+2Q}}.$$

17.5. Понятие о балансировке вращающихся тел

Балансировкой называется уравнивание вращающихся или поступательно движущихся масс механизмов, с тем чтобы устранить влияние сил инерции. В настоящем подразделе рассматривается только балансировка вращающихся деталей машин.

Термины, применяемые в данном подразделе, соответствуют ГОСТу «Балансировка вращающихся тел. Термины».

Неуравновешенностью ротора (вращающегося в опорах тела) называется его состояние, характеризующееся таким распределением масс, которое за время вращения вызывает переменные нагрузки на опорах. Эти нагрузки являются причиной сотрясений и вибраций, преждевременного износа, снижают КПД и экономичность машин. Особо нежелательна неуравновешенность в быстроходных машинах.

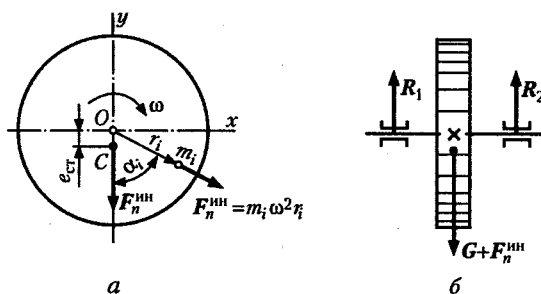


Рис. 17.8

Рассмотрим случай *статической* неуравновешенности, когда центр тяжести тела не лежит на оси вращения.

Представим себе маховик массой m , вращающийся с постоянной угловой скоростью ω . Допустим, что центр тяжести C маховика не лежит на оси вращения, а смещен на величину e_{ct} , называемую эксцентриситетом массы (рис. 17.8, а).

Силу тяжести маховика обозначим G , массой оси пренебрежем. Разобьем маховик на ряд материальных точек с массами m_i и определим равнодействующую центробежных сил инерции $F_{ni}^{ин}$. Проекция этой равнодействующей на ось x вследствие симметрии маховика относительно оси y равна нулю, т. е.

$$F_{nx}^{ин} = \sum (F_{ni}^{ин} \sin \alpha_i) = 0.$$

Следовательно, равнодействующая $F_n^{ин}$ сил $F_{ni}^{ин}$ проецируется на ось y в натуральную величину. Тогда

$$F_n^{ин} = F_{ny}^{ин} \sum (F_{ni}^{ин} \cos \alpha_i) = \sum (m_i \omega^2 r_i \cos \alpha_i) = \omega^2 \sum (m_i y_i) = \omega^2 m e_{ct},$$

так как из статики известно, что

$$\sum (m_i y_i) = m y_C = m e_{ct}.$$

Таким образом, равнодействующая сил инерции всего маховика направлена по линии OC и равна

$$F_n^{ин} = \omega^2 m e_{ct}$$

($F_\tau^{ин} = 0$, так как $\omega = \text{const}$).

Применим принцип Д'Аламбера и составим уравнение равновесия (рис. 17.8, б):

$$\sum Y = 0; \quad R_1 + R_2 - G - F_n^{ин} = 0.$$

Так как сила инерции $F_n^{\text{ин}}$ во время вращения меняет свое положение, то максимальная сила давления на подшипники будет при нижнем положении центра тяжести:

$$F_{\text{max}} = R_1 + R_2 = G + F_n^{\text{ин}}.$$

Определим силу давления F_{max} на подшипники, если масса маховика $m = 102$ кг, его частота вращения 3000 мин^{-1} , а эксцентриситет массы $e_{\text{ст}} = 1$ мм.

$$\text{При } \omega = \pi n / 30 = \pi \cdot 3000 / 30 = 100\pi \text{ рад/с}$$

$$F_n^{\text{ин}} = m\omega^2 e_{\text{ст}} = 102(100\pi)^2 0,001 \approx 10\,000 \text{ Н};$$

$$F_{\text{max}} = mg + F_n^{\text{ин}} = 102 \cdot 9,8 + 10\,000 = 11\,000 \text{ Н}.$$

Как видно из примера, динамические нагрузки могут во много раз превосходить силу тяжести движущихся частей машины.

Из рассмотренного можно сделать вывод: *для уравнивания вращающегося тела необходимо, чтобы его центр тяжести лежал на оси вращения.*

Статическую неуравновешенность легко обнаружить путем статической балансировки на двух горизонтальных параллельных балансировочных ножах. Деталь, не имеющая статической неуравновешенности, будет находиться на ножках в состоянии безразличного равновесия.

Неуравновешенность ротора характеризуется величиной *дисбаланса*. Произведение неуравновешенной массы на ее эксцентриситет называется *значением дисбаланса* и выражается в г·мм.

Сформулированное выше условие уравнивания вращающегося тела *не является достаточным*, так как динамические нагрузки могут возникать и в том случае, когда центр тяжести лежит на оси вращения. Рассмотрим коленчатый вал двухцилиндрового двигателя (рис. 17.9).

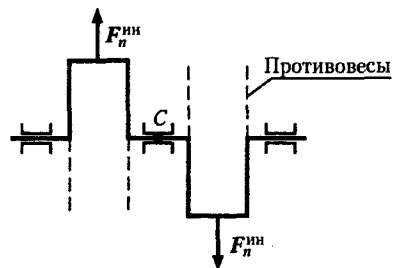


Рис. 17.9

В этом случае, даже если центр тяжести C лежит на оси вращения, возникает пара сил инерции $F_n^{\text{ин}}$, вызывающая изгиб вала и добавочные давления на опоры, меняющиеся по направлению.

Такая неуравновешенность называется *моментной*, и ее можно обнаружить при достаточно быстром вращении, но не в покое. Если статическая и момент-

ная неуравновешенности существуют одновременно, то такая неуравновешенность называется *динамической*.

Причинами неуравновешенности могут быть неточности в изготовлении и сборке деталей, неравномерность распределения материала, деформация деталей, большие зазоры во вращательных парах и т.д.

Устраняют неуравновешенность, удаляя (например, высверливая) избыток материала в более тяжелой части детали или добавляя корректирующую массу в более легкой его части.

При значительной неуравновешенности ставят *противовесы* (см. рис. 17.9), масса которых иногда достигает десятков тысяч килограммов.

В машиностроении статическая и динамическая балансировка производится на *балансировочных станках*.

17.6. Некоторые сведения о механизмах

Законы и метрды теоретической механики находят свое практическое приложение прежде всего в теории механизмов, так как *механизмы являются кинематической основой всех машин, механических приборов и промышленных роботов*.

Основные определения теории механизмов и машин изложены в подразд. 9.2, из которого видно, что кинематические пары и цепи могут быть плоскими и пространственными. Звенья плоских механизмов совершают плоскопараллельное движение.

Основные плоские механизмы с низшими парами. Как известно, звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары).

Основным типом плоского механизма является *шарнирный четырехзвенник*, принципиальная схема которого изображена на рис. 17.10, а. В этом механизме четыре вращательные кинематические пары и четыре звена: 1 — кривошип, 2 — шатун, 3 — коромысло, 4 — стойка. Такой механизм называется *кривошипно-коромысловым* и является *однокривошипным*; крайние положения звеньев показаны на рисунке.

Кривошипно-коромысловый механизм встречается в металлорежущих станках, прессах, ковочных, полиграфических, сельскохозяйственных и других машинах, а также во многих приборах.

Если стойка шарнирного четырехзвенника — самое короткое звено или если звенья 1 и 3 равной длины, то механизм становится *двухкривошипным*, так как звено 3 так же, как и кривошип 1, получит возможность совершать полный оборот.

На рис. 17.10, б показана схема *двухкривошипного механизма*, который называется *шарнирным параллелограммом*; у такого механизма оба кривошипа вращаются в одном направлении

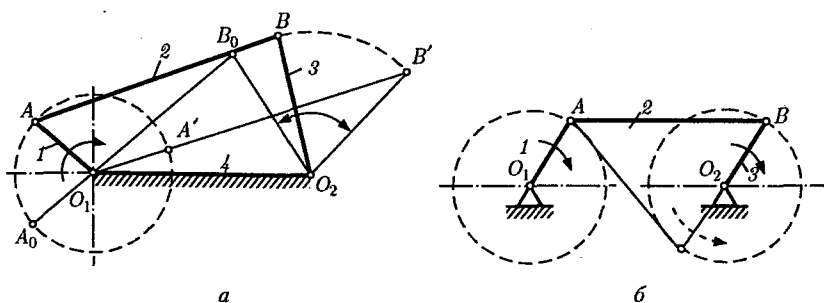


Рис. 17.10

с одинаковой угловой скоростью, а шатун 2 движется поступательно. Шарнирный параллелограмм применяется, например, в локомотивах в качестве спарника, передающего вращение ведомым колесам, или в механизме чертежного приспособления, изображенного на рис. 10.2. На рис. 17.10, б тонкими линиями показан шарнирный антипараллелограмм, кривошипы которого вращаются в противоположных направлениях.

На рис. 17.11 показаны схемы применения шарнирного четырехзвенника в тестосмесительной машине (а) и машине для ворошения сена (б).

Если в шарнирном четырехзвеннике преобразовать одну вращательную пару в поступательную, то получится широко распространенный кривошипно-ползунный механизм (см. рис. 9.1). Такой механизм является центральным, так как ось ползуна пересекает ось кривошипа. Если ось ползуна смещена от оси кривошипа на величину эксцентриситета e (рис. 17.12), то кривошипно-ползунный механизм называется нецентральным. На этом рисунке тонкими линиями показаны крайние положения звеньев механизма и видно, что угол поворота кривошипа при прямом (обычно рабочем) ходе больше, чем при обратном (обычно холостом) ходе. Следовательно, в нецентральном механизме холостой ход совершается с большей скоростью, чем рабочий.

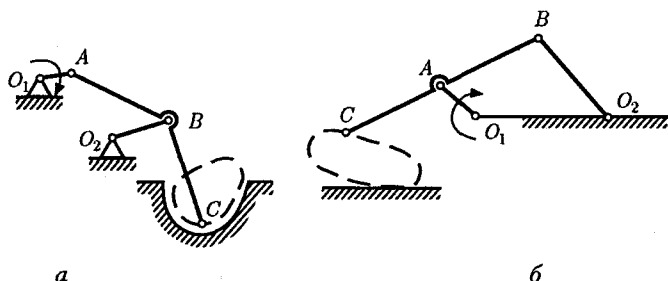


Рис. 17.11

За счет эксцентриситета угол давления α шатуна на ползун (а следовательно, и давление ползуна на направляющие) во время рабочего хода будет меньше, чем при холостом. Это благоприятно сказывается на КПД и долговечности машины, так как обычно нагрузка на механизм при рабочем ходе значительно больше, чем при холостом.

На рис. 9.4 показана схема четырехзвенного кривошипно-кулисного механизма с поступательно движущейся кулисой. Этот механизм преобразует вращательное движение кривошипа OM в возвратно-поступательное движение кулисы с помощью камня кулисы M , шарнирно соединенного с пальцем кривошипа.

На рис. 17.13 изображена схема шестизвенного кривошипно-кулисного механизма, применяемого, например, в поперечно-строгальных станках. Такой механизм преобразует непрерывное вращательное движение кривошипа OA в возвратно-поступательное движение ползуна M с помощью качающейся кулисы O_1B и поступательно движущейся кулисы MB . Из рисунка видно, что угол поворота кривошипа при рабочем ходе ползуна заметно больше, чем при холостом, следовательно, скорость рабочего хода будет меньше скорости холостого хода.

Скорость движения ползуна M при любом положении механизма легко определяется с помощью теоремы о сложении скоростей, согласно которой абсолютная скорость точки равна векторной сумме относительной и переносной скоростей. Прямоугольники скоростей точек A и B показаны на рисунке.

На рис. 17.14 представлена схема кулисного кривошипно-коромыслового механизма с качающимся ползуном. Такой механизм применяется, например, в снегоуборочных машинах.

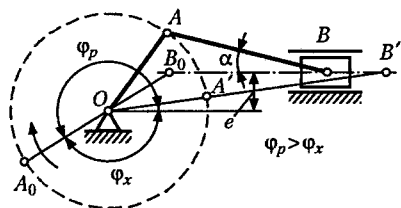


Рис. 17.12

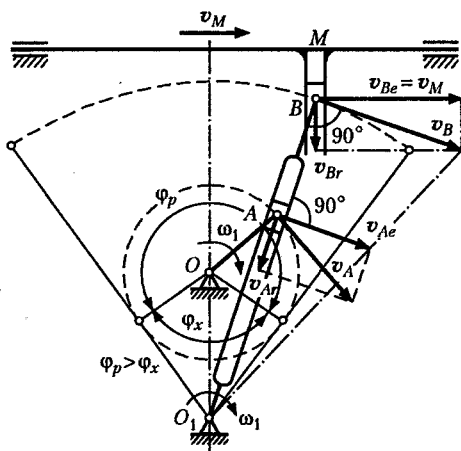


Рис. 17.13

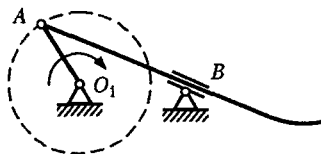


Рис. 17.14

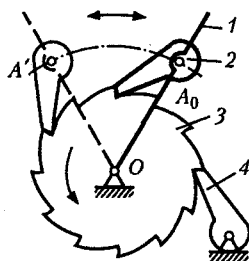
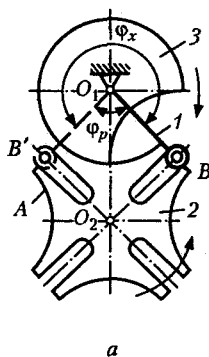


Рис. 17.15

Некоторые механизмы с высшими парами. Как известно, звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам. Высшие кинематические пары имеются, например, в механизмах прерывистого движения и кулачковых механизмах.

На рис. 17.15, а изображен мальтийский механизм, преобразующий непрерывное вращение ведущего звена — кривошипа 1 с пальцем или роликом В на конце в прерывистое вращение ведомого звена — мальтийского креста 2, имеющего радиальные пазы (название механизма возникло от сходства ведомого звена с эмблемой духовно-рыцарского Мальтийского ордена).

Вращение мальтийского креста происходит при повороте кривошипа на угол φ_p ; остальная часть оборота кривошипа на угол φ_x соответствует остановке ведомого звена 2. Неподвижное положение мальтийского креста фиксируется его сегментными вырезами А, по которым скользит диск 3, жестко связанный с кривошипом 1.

Число пазов мальтийского креста — от 3 до 12. При бесконечно большом числе пазов и радиусе мальтийский крест превратится в рейку, которая будет совершать поступательное движение.

На рис. 17.15, а изображен мальтийский механизм внешнего зацепления, когда ведущее и ведомое звенья вращаются в противоположных направлениях. Для передачи вращения в одном направлении применяют механизмы с внутренним зацеплением.

Мальтийские механизмы применяют в металлообрабатывающих станках, пилющих машинах, кинопроекторных аппаратах и приборах точной механики.

На рис. 17.15, б показан один из видов храпового механизма. Такой механизм преобразует возвратно-качательное движение ведущего звена — рычага 1 с рабочей собачкой 2 в прерывистое одностороннее вращательное движение ведомого звена 3, называемое храповым колесом. При вращении рычага и рабочей собачки в исходное положение храповое колесо остается не-

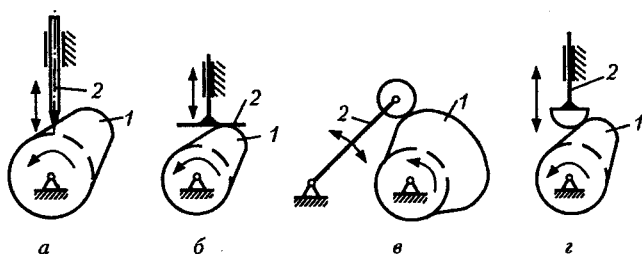


Рис. 17.16

подвижным. Для предотвращения его поворота в обратном направлении предусмотрена стопорная собачка 4.

При бесконечно большом числе зубьев храпового колеса оно превратится в рейку, которая будет совершать прерывистое поступательное движение.

Храповые механизмы применяют, например, в грузоподъемных машинах, механизмах подачи автоматических линий, механизмах завода пружин, пишущих машинах и др.

В технике весьма широкое применение имеют кулачковые механизмы, с помощью которых можно осуществить почти любой заранее заданный закон движения ведомого звена.

Простейший кулачковый механизм — трехзвенный (рис. 17.16), состоит из кулачка 1, толкателя 2 и стойки. Механизм преобразует вращательное движение кулачка в возвратно-поступательное или качательное движение толкателя.

На рис. 17.16 показаны плоские кулачковые механизмы с толкателями различной конструкции: игольчатым (а), тарельчатым (б), роликовым (в) и сферическим (г).

Существуют механизмы с поступательно движущимися кулачками; такие кулачки называют ко п и р а м и.

Кулачковые механизмы применяют, например, в двигателях внутреннего сгорания, металлорежущих станках, приборостроении и т.д.

На рис. 17.17 показана сложная разветвленная кинематическая цепь одноцилиндрового двигателя внутреннего сгорания. Цепь состоит из кривошипно-ползунного механизма 1—2—3 и двух кулачковых механизмов 4—5 клапанного газораспределения. Коленчатый вал (кривошип 1) и распределительный вал с кулачками 4 связаны между собой зубчатыми колесами.

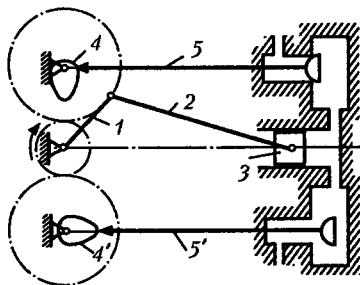


Рис. 17.17

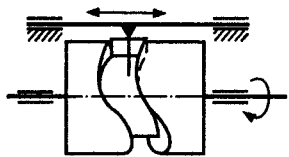


Рис. 17.18

Все рассмотренные ранее механизмы являются плоскими. На рис. 17.18 изображена схема пространственного кулачкового механизма с цилиндрическим кулачком (барабаном). Такой механизм применяется, например, в металлорежущих автоматах и полуавтоматах.

17.7. Понятие о промышленных роботах

Во второй половине XX в. вслед за автоматизацией производства и электронно-вычислительной техникой в лидеры технического прогресса вышла робототехника, которая стала бурно внедряться в технологические процессы.

В нашей стране производство роботов непрерывно возрастает и исчисляется десятками тысяч штук в год. Промышленные роботы (т.е. роботы, применяемые в производственных процессах) позволяют переходить к качественно новому уровню автоматизации — созданию автоматических производственных систем, работающих с минимальным участием человека, в том числе созданию цехов и заводов-автоматов.

Термин «робот» был введен в литературу чешским писателем Карелом Чапеком в начале 20-х годов прошлого века и обозначал «искусственных людей», заменяющих человека в процессе работы.

Применяемые в данном подразделе термины, определения и классификация соответствуют ГОСТ 25685—83 и 25686—85.

Промышленным роботом называется автоматическая машина, состоящая из исполнительного устройства и перепрограммируемого устройства управления. Промышленные роботы служат для выполнения в производственных процессах двигательных и управляющих функций, заменяющих аналогичные функции человека. В общем случае в исполнительное устройство робота входит манипулятор с рабочим органом и устройством управления.

Промышленные роботы применяют для обслуживания металлорежущих станков, печей и нагревательных устройств, сварки, окраски, нанесения защитных покрытий, сборки, транспортных и складских работ.

Применение промышленных роботов создает условия для повышения производительности труда и качества продукции, роста коэффициента сменности оборудования, интенсификации производственных процессов, улучшения условий труда и экономии рабочей силы. По сравнению с традиционными средствами автоматизации промышленные роботы обеспечивают большую гибкость технических и организационных решений вопросов производственных процессов.

Промышленные роботы в зависимости от *специализации* подразделяют на универсальные, специализированные и специальные. В зависимости от *грузоподъемности* роботы подразделяют на сверхлегкие (до 1 кг), легкие, средние, тяжелые и сверхтяжелые (свыше 1000 кг). В зависимости от *возможности передвижения* роботы бывают стационарные и подвижные. По *способу установки* различают роботы напольные, подвесные и встроенные.

Приводы промышленных роботов могут быть электромеханическими, гидравлическими, пневматическими и комбинированными. Кроме того, промышленные роботы классифицируют по *числу степеней подвижности, виду применяемой системы координат и способу программирования*.

Весьма существенной является классификация роботов по *виду управления* — программное и адаптивное. Роботы с *программным* управлением имеют жесткую управляющую программу с заранее установленным заданием. Роботы с *адаптивным* управлением снабжены устройствами для восприятия внешней среды (например, телекамера, микрофон, щуп), они имеют управляющую программу, способную приспосабливаться к изменениям условий технологического процесса или изменениям внешней среды.

Часть II

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Глава 18

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

18.1. Исходные понятия

Наука о сопротивлении материалов возникла в эпоху Возрождения, когда развитие техники, торговли, мореплавания, военного дела потребовало научных обоснований, необходимых для постройки крупных морских судов, мостов, гидротехнических сооружений и других сложных конструкций. Основоположником этой науки считают итальянского ученого Г. Галилея (1564—1642).

Практика показывает, что все части конструкций под действием нагрузок *деформируются*, т. е. изменяют свою форму и размеры, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкции.

Сопротивление материалов есть наука о прочности и деформируемости материалов и элементов машин и сооружений.

Прочностью называется способность материала конструкций и их элементов сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь (в дальнейшем понятие прочности будет уточнено).

В сопротивлении материалов рассматривают методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку, при наименьшей затрате материала.

Под жесткостью понимается способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформации.

Расчеты на жесткость гарантируют, что изменения формы и размеров конструкций и их элементов не превысят допустимых норм.

Под устойчивостью понимается способность конструкции сопротивляться усилиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния равновесия.

Расчеты на устойчивость предотвращают возможность внезапной потери устойчивости и искривления длинных или тонких деталей.

Примером потери устойчивости может служить внезапное искривление длинного прямолинейного стержня при сжатии вдоль оси.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить себе состоящими из отдельных элементов, например, брусьев, пластин, оболочек и массивов.

Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является брус, т.е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают прямолинейные и криволинейные, постоянного и переменного сечения. В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют колоннами, балками, стержнями.

Плоское сечение, перпендикулярное оси бруса, называется поперечным; сечение, параллельное оси бруса (прямолинейного), — продольным; остальные плоские сечения — наклонными.

Кроме расчета брусьев сопротивление материалов занимается расчетом пластин и оболочек, т.е. тел, имеющих малую толщину по сравнению с другими размерами (например, резервуары, трубы, обшивка кораблей и самолетов). Тела, у которых все три измерения одинакового порядка, называются массивами (например, фундаменты, станины станков). Расчеты пластин, оболочек и массивов в настоящем учебном пособии не рассматриваются.

При деформации тела под действием внешних сил внутри него возникают силы упругости, которые препятствуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в первоначальное положение. Появление сил упругости обусловлено существованием в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия.

В сопротивлении материалов изучают деформации тел и возникающие при этих деформациях внутренние силы.

После прекращения действия внешних сил вызванная ими деформация может полностью или частично исчезнуть. Способность материала устранять деформацию после прекращения действия внешних сил называется упругостью. Деформация, исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется упругой; деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется остаточной, или пластической. Способность материала иметь значительные остаточные деформации, не разрушаясь при этом, называют пластичностью, а сами материалы называются пластичными. К числу таких материалов относятся низкоуглеродистая сталь, алюминий, медь, латунь и др.

Подчеркнем, что возникновение значительных остаточных деформаций в большинстве случаев приводит к нарушению нормальной работы конструкции и поэтому считается нарушением прочности (как и разрушение).

Материалы, обладающие весьма малой пластичностью, называются хрупкими. В отличие от пластичных хрупкие материалы

разрушаются без заметных остаточных деформаций. К хрупким материалам относят чугун, твердые сплавы, стекло, кирпич и др.

Наука о сопротивлении материалов опирается на законы теоретической механики, в которой тела полагались абсолютно жесткими, т. е. неспособными деформироваться. Пользуясь рассмотренным в теоретической механике принципом отвердевания, в сопротивлении материалов мы будем применять к деформированным телам условия равновесия статики для определения реакций связей и действующих в сечениях деталей внутренних сил.

Однако *при расчетах на прочность и жесткость некоторые положения* теоретической механики оказываются *неприменимы*, в частности: 1) действующие на тело внешние силы нельзя заменять их равнодействующей или эквивалентной системой сил; 2) силу нельзя переносить вдоль линии ее действия; 3) пару сил нельзя перемещать в плоскости действия пары.

Эти правила имеют исключение. Так, например, силы, приложенные к небольшой поверхности тела, как и в теоретической механике, мы будем считать сосредоточенными, т. е. приложенными в точке; распределенные реактивные силы, приложенные к защемленному концу балки, мы по-прежнему будем заменять реактивной силой и реактивным моментом. Такие замены не вносят существенных изменений в условия деформации тела. Это положение называют принципом *смягченных граничных условий*, или принципом Сен-Венана, по имени французского ученого А. Сен-Венана (1797—1886).

Принцип Сен-Венана можно сформулировать следующим образом: *в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, модуль внутренних сил мало зависит от конкретного способа приложения сил.*

В дальнейшем при изучении отдельных видов деформаций мы на основании принципа Сен-Венана не будем интересоваться конкретными способами приложения внешних сил, а будем считать, что в местах их приложения внутренние силы меняются скачкообразно.

18.2. Основные гипотезы и допущения

Конструкционные материалы, из которых изготавливают детали машин и сооружений, не являются, строго говоря, непрерывными, однородными во всех точках и изотропными (имеющими одинаковые свойства во всех направлениях).

В процессе изготовления заготовок и получения из них готовых деталей в материале появляются различные, не поддающиеся учету поверхностные и внутренние дефекты, например раковины, трещины и неоднородность структуры в литых деталях, волосовины у катаных или кованых деталей, первоначальные внутренние усилия,

вызванные неравномерностью остывания литых и кованных деталей, неравномерностью высыхания и неоднородностью древесины, неравномерностью затвердевания и неоднородностью бетона и т.д.

Так как закономерности возникновения указанных явлений установить невозможно, то в сопротивлении материалов принимается ряд гипотез и допущений, которые позволяют исключить из рассмотрения эти явления. В результате объектом изучения в сопротивлении материалов становится не само реальное тело, а его приближенная модель. Экспериментальная проверка выводов, полученных на основании приведенных ниже гипотез и допущений, показывает, что эти выводы вполне пригодны для применения в практике инженерных расчетов.

Перейдем к рассмотрению основных гипотез и допущений, касающихся физико-механических свойств материалов.

1. Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий. Согласно этой гипотезе предполагается, что если нет причин, вызывающих деформацию тела (нагружение, изменение температуры), то во всех его точках *внутренние усилия равны нулю*. Таким образом, не принимаются во внимание силы взаимодействия между частицами ненагруженного тела.

2. Допущение об однородности материала. Физико-механические свойства тела могут быть неодинаковыми в разных точках. В сопротивлении материалов этими различиями пренебрегают, полагая, что материал во всех точках тела обладает *одинаковыми свойствами*.

3. Допущение о непрерывности материала. Согласно этому допущению материал любого тела имеет *непрерывное строение* и представляет собой *сплошную среду*. Допущение о непрерывном строении материала позволяет применять при расчетах методы высшей математики (дифференциальное и интегральное исчисления).

4. Допущение об изотропности материала. Это допущение предполагает, что материал тела обладает во всех направлениях *одинаковыми свойствами*.

Многие материалы состоят из кристаллов, у которых физико-механические свойства в различных направлениях существенно различны. Однако благодаря наличию в теле большого количества беспорядочно расположенных кристаллов свойства всей массы материала в различных направлениях выравниваются.

Допущение об изотропности хорошо подтверждается практикой для большинства материалов и лишь приближенно для таких материалов, как камень, пластмассы, железобетон.

Материалы, имеющие неодинаковые свойства в разных направлениях, называются анизотропными, например древесина.

5. Допущение об идеальной упругости. Это допущение предполагает, что в известных пределах нагружения матери-

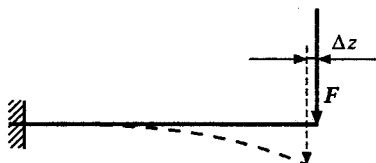


Рис. 18.1

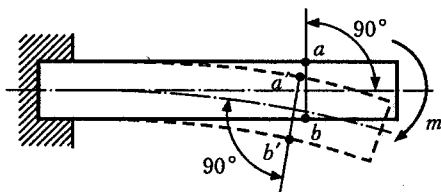


Рис. 18.2

ал обладает *идеальной упругостью*, т.е. после снятия нагрузки деформации полностью исчезают.

Рассмотрим теперь гипотезы и допущения, связанные с деформациями элементов конструкций.

Изменение линейных и угловых размеров тела называется соответственно *линейной* и *угловой деформацией*. Изменение положения (координат) точек тела, вызванное деформацией, называется *перемещением*.

1. Допущение о малости перемещений, или принцип начальных размеров. Согласно этому допущению деформации тела и связанные с ними перемещения точек и сечений малы по сравнению с размерами тела. На основании этого мы будем пренебрегать изменениями в расположении внешних сил, вызванными деформацией. Так, например, не будем принимать во внимание смещение Δz линии действия силы F , показанное на рис. 18.1.

2. Допущение о линейной деформируемости тел. Согласно этому допущению перемещения точек и сечений упругого тела в известных пределах нагружения *прямо пропорциональны* силам, вызывающим эти перемещения.

3. Гипотеза плоских сечений, или гипотеза Бернулли. Согласно этой гипотезе плоские поперечные сечения, проведенные в теле до деформации, остаются при деформации *плоскими* и *нормальными к оси* (рис. 18.2). Эта гипотеза была впервые высказана швейцарским ученым Якобом Бернулли (1654—1705) и положена в основу при изучении большинства основных деформаций бруса.

К основным гипотезам сопротивления материалов относится также принцип независимости действия сил, который будет сформулирован в конце этой главы (аналогичный принцип был рассмотрен в динамике).

18.3. Виды нагрузок и основных деформаций

В процессе работы машин и сооружений их узлы и детали воспринимают и передают друг другу различные нагрузки, т.е. си-

ловые воздействия, вызывающие изменение внутренних сил и деформации узлов и деталей.

Силы, воспринимаемые элементами конструкций, являются либо массовыми, или объемными (силы тяжести, силы инерции), либо поверхностными силами контактного взаимодействия рассматриваемого элемента с соседними элементами или прилегающей к нему средой (например, пар, воздух, жидкость).

Из теоретической механики известно, что поверхностные нагрузки бывают сосредоточенными или распределенными.

В зависимости от характера действия нагрузки подразделяют на статические и динамические.

Статическими называются нагрузки, числовое значение, направление и место приложения которых остаются постоянными или меняются медленно и незначительно. Таким образом, можно полагать, что при передаче статических нагрузок все части конструкции находятся в равновесии.

Пример статической нагрузки — сила тяжести сооружений.

Динамическими называются нагрузки, характеризующиеся быстрым изменением во времени их значения, направления или места приложения.

К динамическим относятся ударные, внезапно приложенные и повторно-переменные нагрузки. Ударные нагрузки возникают, например, при ковке металла или забивке свай; примером внезапно прилагаемой нагрузки является давление колеса, катящегося по рельсу; повторно-переменные нагрузки испытывают, например, детали кривошипно-ползунного механизма паровой машины. К динамическим относятся также инерционные нагрузки, например силы инерции в ободу вращающегося маховика.

Следует помнить, что в число внешних сил, принимаемых во внимание при расчете конструкций, входят *не только* активные силы, *но также* реакции связей и силы инерции (при движении с достаточно большим ускорением).

Перейдем к рассмотрению *основных деформаций*. Из практики известно, что в процессе эксплуатации элементы конструкций испытывают следующие основные деформации:

1) *растяжение* — эту деформацию испытывают, например, канаты, тросы, цепи, шток протяжного станка;

2) *сжатие* — на сжатие работают, например, колонны, кирпичная кладка, пуансоны штампов;

3) *сдвиг* — деформацию сдвига испытывают заклепки, болты, шпонки, швы сварных соединений. Деформацию сдвига, доведенную до разрушения материала, называют *срезом*. Срез возникает, например, при резке ножницами или штамповке деталей из листового материала;

4) кручение — на кручение работают валы, передающие мощность при вращательном движении. Обычно деформация кручения сопровождается другими деформациями, например изгибом;

5) изгиб — на изгиб работают балки, оси, зубья зубчатых колес и другие элементы конструкций.

Очень часто элементы конструкций подвергаются действию нагрузок, вызывающих одновременно несколько основных деформаций.

18.4. Метод сечений. Напряжение

Для расчетов деталей машин и сооружений на прочность необходимо знать внутренние силы упругости, возникающие в результате действия приложенных к деталям внешних сил.

В теоретической механике мы познакомились с понятием метода сечений. Этот метод широко применяется в сопротивлении материалов для определения внутренних сил, поэтому рассмотрим его подробно. Напомним, что всякое тело, в том числе деталь машины или сооружения, можно полагать системой материальных точек.

В теоретической механике мы имели дело с неизменяемыми системами; в сопротивлении материалов рассматриваются изменяемые (деформируемые) системы материальных точек.

Метод сечений заключается в том, что тело мысленно рассекается плоскостью на две части, любая из которых отбрасывается и взамен нее к сечению оставшейся части прикладываются внутренние силы, действовавшие до разреза; оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних и приложенных к сечению внутренних сил.

Согласно третьему закону Ньютона (аксиома взаимодействия), внутренние силы, действующие в сечении оставшейся и отброшенной частей тела, равны по модулю, но противоположны по направлению. Таким образом, рассматривая равновесие любой из двух частей рассеченного тела, мы получим одно и то же значение внутренних сил, однако выгоднее рассматривать ту часть тела, для которой уравнивание равновесия проще.

В соответствии с принятым допущением о непрерывности материала тела мы можем утверждать, что внутренние силы, возникающие в теле, представляют собой силы, равномерно или неравномерно распределенные по сечению.

Применяя к оставленной части тела условия равновесия, мы не сможем найти закон распределения внутренних сил по сечению, но сможем определить статические эквиваленты этих сил.

Так как основным расчетным объектом в сопротивлении материалов является брус и чаще всего нас будут интересовать внут-

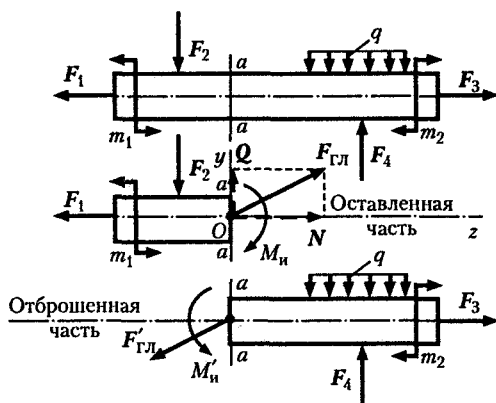


Рис. 18.3

ренние силы в его поперечном сечении, то рассмотрим, каковы будут статические эквиваленты внутренних сил в поперечном сечении бруса. Рассечем брус (рис. 18.3) поперечным сечением $a-a$ и рассмотрим равновесие его левой части.

Если внешние силы, действующие на брус, лежат в одной плоскости, то в общем случае статическим эквивалентом внутренних сил, действующих в сечении $a-a$, будут главный вектор $F_{\text{гл}}$, приложенный в центре тяжести сечения, и главный момент $M_{\text{гл}} = M_{\text{н}}$, уравнивающие плоскую систему внешних сил, приложенных к оставленной части бруса.

Разложим главный вектор на составляющую N , направленную вдоль оси бруса, и составляющую Q , перпендикулярную этой оси, т.е. лежащую в плоскости поперечного сечения.

Эти составляющие главного вектора вместе с главным моментом назовем *внутренними силовыми факторами*, действующими в сечении бруса. Составляющую N назовем *продольной силой*, составляющую Q — *поперечной силой*, пару сил с моментом $M_{\text{н}}$ — *изгибающим моментом*.

Для определения указанных трех внутренних силовых факторов применим известные из статики три уравнения равновесия оставленной части бруса, а именно:

$$\sum Z = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0$$

(ось z всегда направляем по оси бруса).

Если внешние силы, действующие на брус, не лежат в одной плоскости, т.е. представляют собой пространственную систему сил, то в общем случае в поперечном сечении бруса возникают *шесть внутренних силовых факторов* (рис. 18.4), для определения которых применим известные из статики *шесть уравнений равновесия* оставленной части бруса, а именно:

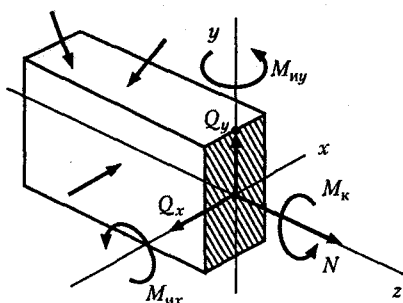


Рис. 18.4

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \quad \sum Y = 0; \\ \sum Z &= 0; \quad \sum M_x = 0; \\ \sum M_y &= 0; \quad \sum M_z = 0.\end{aligned}$$

Шесть внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении бруса в самом общем случае, носят следующие названия: N — продольная сила, Q_x, Q_y — поперечные силы, M_k — крутящий момент, M_{ix}, M_{iy} — изгибающие моменты.

При разных деформациях в поперечном сечении бруса возникают различные внутренние силовые факторы. Рассмотрим частные случаи:

1. В сечении возникает *только продольная сила N* . Это деформация растяжения (если сила N направлена от сечения) или деформация сжатия (если сила N направлена к сечению).

2. В сечении возникает *только поперечная сила Q* . Это деформация сдвига.

3. В сечении возникает *только крутящий момент M_k* . Это деформация кручения.

4. В сечении возникает *только изгибающий момент M_n* . В этом случае это деформация чистого изгиба. Если в сечении одновременно возникают изгибающий момент M_n и поперечная сила Q , то изгиб называют поперечным.

5. Если в сечении *одновременно возникает несколько внутренних силовых факторов* (например, изгибающий и крутящий моменты или изгибающий момент и продольная сила), то имеет место сочетание основных деформаций (сложное сопротивление).

Наряду с понятием деформации одним из основных понятий сопротивления материалов является напряжение.

Напряжение характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении.

Рассмотрим какой-либо произвольно нагруженный брус и применим к нему метод сечений (рис. 18.5). Выделим в сечении бесконечно малый элемент площади dA (что мы имеем право делать, так как считаем материал непрерывным). Ввиду мало-

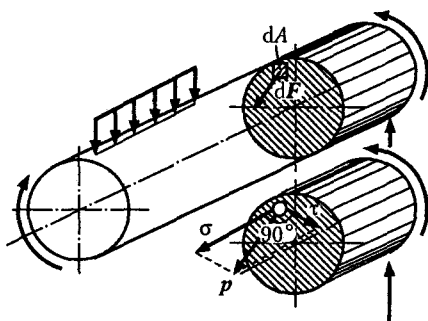


Рис. 18.5

сти этого элемента можно считать, что в его пределах внутренние силы, приложенные в различных точках, одинаковы по модулю и направлению и, следовательно, представляют собой систему параллельных сил. Равнодействующую этой системы обозначим dF . Разделив dF на площадь элементарной площадки dA , определим интенсивность внутренних сил, т.е. напряжение p в точках элементарной площадки dA :

$$p = dF/dA.$$

Таким образом, *напряжение есть внутренняя сила, отнесенная к единице площади сечения*. Напряжение — величина векторная.

Единица напряжения:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = \text{ньютон на квадратный метр} = \\ = \text{Н/м}^2 = \text{паскаль (Па)}.$$

Поскольку эта единица напряжения очень мала, то мы будем применять более крупную кратную единицу — мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Числовые значения напряжения, выраженного в мегапаскалях и ньютонах на квадратный миллиметр, совпадают.

Разложим вектор напряжения p на две составляющие: σ — перпендикулярную плоскости сечения и τ — лежащую в плоскости сечения (см. рис. 18.5). Эти составляющие назовем так: σ — нормальное напряжение, τ — касательное напряжение.

Так как угол между нормальным и касательным напряжениями всегда равен 90° , то модуль полного напряжения p определим по формуле

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет вполне определенный физический смысл. Как мы убедимся в дальнейшем, в поперечном сечении бруса при растяжении, сжатии и чистом изгибе действуют *только нормальные напряжения*, а при сдвиге и кручении — *только касательные напряжения*.

В заключение рассмотрим гипотезу, которая называется *принципом независимости действия сил* и формулируется так: *при действии на тело нескольких нагрузок внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации в любом месте могут быть определены как сумма этих величин, найденных от каждой нагрузки в отдельности*.

Пользуясь принципом независимости действия сил, мы, начав с изучения простейших основных деформаций, когда в поперечных

сечениях бруса действуют только нормальные или только касательные напряжения, в дальнейшем перейдем к изучению более сложных основных деформаций, когда в поперечном сечении действуют и те и другие напряжения, а затем рассмотрим случаи сочетания основных деформаций, что иногда называют сложным сопротивлением.

Заметим, что принцип независимости действия сил применим только для конструкций, деформации которых малы по сравнению с размерами и пропорциональны действующим нагрузкам.

Глава 19

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

19.1. Напряжения и продольная деформация при растяжении и сжатии

Растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила. Брусья с прямолинейной осью (прямые брусья), работающие на растяжение или сжатие, часто называют стержнями.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой брус, вдоль оси которого действуют активные силы F и $2F$ (рис. 19.1). В дальнейшем все векторные величины будем обозначать их модулями.

Части бруса постоянного сечения, заключенные между поперечными плоскостями, в которых приложены активные или реактивные силы, будем называть участками. Изображенный на рис. 19.1 брус состоит из двух участков.

Применив метод сечений, определим продольные силы N_1 и N_2 на участках. Рассечем брус на первом участке поперечным сечением

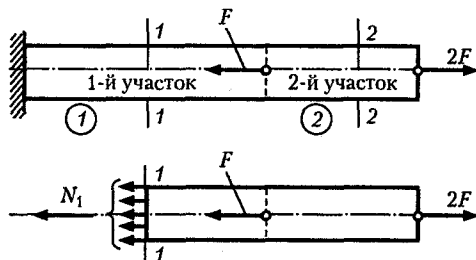


Рис. 19.1

ем 1—1. Во всех точках бруса будут действовать внутренние распределенные силы, равнодействующая которых определится из условия равновесия одной из частей бруса (например, правой от сечения):

$$\sum Z = 0; 2F - F - N_1 = 0,$$

откуда

$$N_1 = 2F - F = F.$$

Мы видим, что для равновесия оставленной части бруса в сечении 1—1 необходимо приложить только силу N_1 , направленную вдоль оси, т. е. продольную силу.

Продольная сила есть равнодействующая внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении бруса. Нетрудно понять, что в сечении 2—2 на втором участке продольная сила будет иметь другое значение: $N_2 = 2F$. Таким образом, *продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону сечения* (имеется в виду, что все силы направлены вдоль оси бруса).

Очевидно, что в пределах одного участка продольная сила будет иметь постоянное значение. Следует помнить, что, рассматривая равновесие части бруса, расположенной не справа, а слева от сечения, мы должны были ввести в уравнение равновесия реакцию защемленного конца, определенную путем рассмотрения равновесия всего бруса.

В дальнейшем растягивающие (направленные от сечения) продольные силы мы будем считать *положительными*, а сжимающие (направленные к сечению) — *отрицательными*.

Иначе говоря, если равнодействующая внешних сил, приложенных к левой части бруса, направлена влево, а приложенных к правой части — вправо, то продольная сила в данном сечении будет *положительной*, и наоборот.

При изучении ряда деформаций мы будем мысленно представлять себе брусья состоящими из бесчисленного количества волокон, параллельных оси, и предполагать, что при деформации растяжения и сжатия *волокна не надавливают друг на друга* (это предположение называется гипотезой о ненадавливании волокон).

Если изготовить прямой брус из резины (для большей наглядности), нанести на его поверхности сетку продольных и поперечных линий и подвергнуть брус деформации растяжения, то можно отметить следующее: 1) поперечные линии останутся в плоскостях, перпендикулярных оси, а расстояния между ними увеличатся; 2) продольные линии останутся прямыми, а расстояния между ними уменьшатся.

Из этого опыта можно сделать вывод, что при растяжении справедлива гипотеза плоских сечений и, следовательно, все волокна бруса удлиняются на одну и ту же величину.

Все сказанное выше позволяет сделать вывод, что при растяжении и сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только *нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению* и определяемые по формуле

$$\sigma = N / A,$$

где N — продольная сила; A — площадь поперечного сечения.

Очевидно, что при растяжении и сжатии форма сечения на напряжение не влияет.

В сечениях, близких к точкам приложения растягивающих или сжимающих сил, закон распределения напряжений по сечению будет более сложным, но, пользуясь принципом смягченных граничных условий, мы будем этими отклонениями пренебрегать и считать, что во всех сечениях бруса напряжения распределены равномерно и что в сечении, где к брусу приложена вдоль оси сосредоточенная сила, значения продольной силы и напряжений меняются скачкообразно.

Для наглядного изображения распределения вдоль оси бруса продольных сил и нормальных напряжений строят графики, называемые *эпюрами*, причем для нормальных напряжений применяется то же правило знаков, что и для продольных сил.

Пример 19.1. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений для ступенчатого бруса, изображенного на рис. 19.2.

Решение. Разобьем брус на три участка. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и места изменения размеров поперечного сечения.

Для построения эпюры продольных сил N под чертежом бруса проводим ось эпюры, параллельную оси бруса. Величины продольных сил

в произвольном масштабе откладываем перпендикулярно оси эпюры, причем положительные значения N (растяжение) откладываются вверх, а отрицательные (сжатие) — вниз от оси. Эпюру заштриховываем, как показано на рисунке. В точках приложения сил на эпюре N получают скачкообразные изменения, причем величины «скачка» равна модулю приложенной в сечении бруса силы.

Применяя метод сечений, устанавливаем, что во всех поперечных сечениях первого и второго

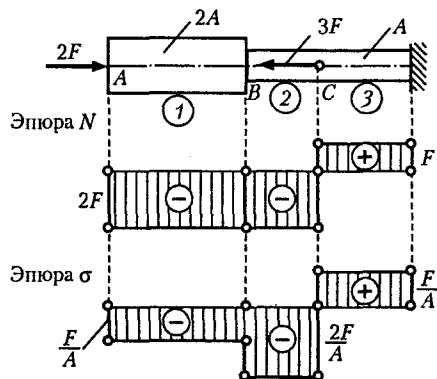


Рис. 19.2

участков действует продольная сила $N_1 = -2F = N_2$. Откладываем вниз от оси эпюры N величину $2F$ в произвольном масштабе и проводим прямую, параллельную оси эпюры. В сечении C бруса приложена сила $3F$. Применяя метод сечений, уста-

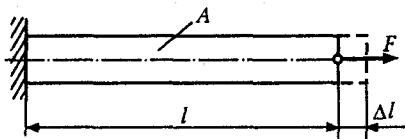


Рис. 19.3

навливаем, что во всех поперечных сечениях третьего участка действует продольная сила $N_3 = F$. Очевидно, что значение ординаты эпюры продольных сил под заделкой равно реакции заделки. Применяя метод сечений, выгоднее рассматривать равновесие части бруса, расположенной со стороны его свободного конца, в противном случае необходимо заранее определять и вводить в уравнение равновесия реакцию заделки.

Для построения эпюры σ определим нормальные напряжения на участках бруса. Тогда на первом участке нормальные напряжения будут $\sigma_1 = -2F/(2A) = -F/A$, на втором — $\sigma_2 = -2F/A$, на третьем — $\sigma_3 = F/A$. Правила построения эпюры σ те же, что и для эпюры N .

Для расчетов на прочность особый интерес представляют те сечения бруса, в которых напряжения являются по абсолютному значению максимальными. Эти сечения являются предположительно опасными. В нашем примере такими будут сечения бруса на втором участке.

Перейдем к рассмотрению деформаций. Представим себе прямой брус постоянного поперечного сечения A , длиной l , жестко заземленный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой F (рис. 19.3). Под действием этой силы брус удлинится на некоторую величину Δl , которую назовем абсолютным удлинением. Отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине l назовем относительным удлинением и обозначим ϵ :

$$\epsilon = \Delta l / l.$$

Относительное удлинение ϵ — число отвлеченное, иногда его выражают в процентах:

$$\epsilon = (\Delta l / l) 100.$$

Вследствие деформации поперечные сечения бруса перемещаются в направлении оси. Взаимное перемещение двух сечений равно изменению длины части бруса, заключенной между этими сечениями.

Итак, деформация бруса при растяжении и сжатии характеризуется абсолютным и относительным удлинением или укорочением.

19.2. Закон Гука при растяжении и сжатии

Напряжения и деформации при растяжении и сжатии связаны между собой зависимостью, которая называется законом Гука, по

имени установившего этот закон английского физика Роберта Гука (1635—1703).

Закон Гука при растяжении и сжатии *справедлив лишь в определенных пределах нагружения* и формулируется так: *нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению.*

Математически закон Гука можно записать в виде равенства:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E характеризует жесткость материала, т.е. его способность сопротивляться упругим деформациям растяжения или сжатия, и называется модулем продольной упругости, или модулем упругости первого рода.

Модуль упругости и напряжение выражаются в одинаковых единицах:

$$[E] = [\sigma] / [\varepsilon] = \text{Па}.$$

Значения E , МПа, для некоторых материалов:

Чугун	$(1,50 \dots 1,60) \cdot 10^5$
Сталь	$(1,96 \dots 2,16) \cdot 10^5$
Медь	$(1,00 \dots 1,30) \cdot 10^5$
Сплавы алюминия	$(0,69 \dots 0,71) \cdot 10^5$
Дерево (вдоль волокон)	$(0,10 \dots 0,16) \cdot 10^5$
Текстолит	$(0,06 \dots 0,10) \cdot 10^5$
Капрон	$(0,01 \dots 0,02) \cdot 10^5$

Если в формулу закона Гука подставить выражения

$$\sigma = N / A; \quad \varepsilon = \Delta l / l,$$

то получим

$$\Delta l = Nl / (EA).$$

Произведение EA , стоящее в знаменателе, называется жесткостью сечения при растяжении и сжатии; оно характеризует одновременно физико-механические свойства материала и геометрические размеры поперечного сечения бруса.

Эта формула читается так: *абсолютное удлинение или укорочение прямо пропорционально продольной силе, длине и обратно пропорционально жесткости сечения бруса.*

Отношение EA/l называется жесткостью бруса при растяжении или сжатии.

Приведенные формулы закона Гука применимы только для брусьев или их участков постоянного поперечного сечения, изготовленных из одного материала и при постоянной продольной силе.

Для бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, продольной силой, изменение длины всего бруса равно алгебраической сумме удлинений и укорочений отдельных участков:

$$\Delta l = \sum (\Delta l_i).$$

Пример 19.2. На стальной ступенчатый брус действуют силы $F = 40$ кН и $R = 60$ кН. Площади поперечных сечений равны $A_1 = 800$ мм², $A_2 = 1600$ мм². Длины участков указаны на рис. 19.4; $a = 0,2$ м. Определить изменение длины бруса двумя способами: 1) с помощью эпюры продольных сил; 2) с помощью принципа независимости действия сил. Принять $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение. 1-й способ. Разобьем брус на три участка и, применяя метод сечений, определим значения продольных сил на каждом из них: $N_1 = N_2 = -40$ кН (сжатие), $N_3 = 20$ кН (растяжение). Строим эпюру продольных сил.

Для бруса, состоящего из нескольких участков, $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, где по закону Гука $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot 3a}{EA_1}$ — изменение длины первого участка; аналогично, $\Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EA_2}$, $\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot 2a}{EA_2}$ — изменение длин второго и третьего участков.

Следовательно,

$$\Delta l = N_1 \cdot 3a / (EA_1) + N_2 a / (EA_2) + N_3 \cdot 3a / (EA_2).$$

Подставив числовые значения с учетом знаков продольных сил, получим

$$\Delta l = -40 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,2 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 800 \cdot 10^{-6}) - 40 \cdot 10^3 \cdot 0,2 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 1600 \cdot 10^{-6}) + 20 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,2 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 1600 \cdot 10^{-6}),$$

откуда

$$\Delta l = -0,15 - 0,025 + 0,025 = -0,15 \text{ мм.}$$

Следовательно, брус укоротился на 0,15 мм.

2-й способ. Решим этот пример с помощью принципа независимости действия сил. Изменение длины бруса Δl будет складываться из укорочения Δl_F всего бруса под действием силы F и удлинения Δl_R третьего участка под действием силы R :

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_R.$$

Определим каждое из этих слагаемых:

$$\Delta l_F = -F \cdot 3a / (EA_1) - F(a + 2a) / (EA_2).$$

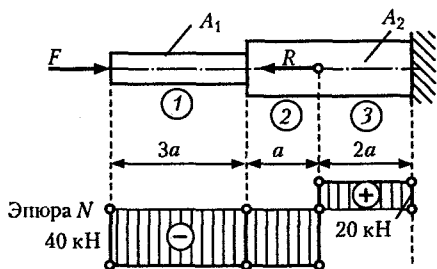


Рис. 19.4

Подставляя числовые значения, получим $\Delta l_F = -0,225$ мм.
Аналогично найдем

$$\Delta l_R = R \cdot 2a / (EA_2); \quad \Delta l_R = 0,075 \text{ мм},$$

откуда

$$\Delta l = -0,225 + 0,075 = -0,15 \text{ мм}.$$

Решая задачу двумя способами, мы получили один и тот же результат, что свидетельствует о правильности решения.

19.3. Поперечная деформация при растяжении и сжатии

Описанный в подразд. 19.1 опыт с резиновым брусом показывает, что *поперечные размеры сечения при растяжении уменьшаются, а при сжатии увеличиваются*. Это характерно для растяжения и сжатия всех материалов. Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении или сжатии отношение относительных поперечной и продольной деформаций для данного материала — величина постоянная.

Впервые зависимость между относительной поперечной ϵ и относительной продольной ϵ' деформациями была установлена французским ученым С. Пуассоном (1781—1840). Эта зависимость имеет следующий вид:

$$|\epsilon'| = \nu |\epsilon|,$$

где ν — коэффициент поперечной деформации, называемый коэффициентом Пуассона.

Нетрудно понять, что ν — величина безразмерная.

Коэффициент Пуассона, как и модуль упругости первого рода, зависит только от материала и характеризует его упругие свойства. При растяжении и сжатии коэффициент Пуассона полагают одинаковым.

Приведем значения ν для некоторых материалов:

Пробка.....	0,00	Латунь.....	0,32 ... 0,42
Чугун.....	0,23 ... 0,27	Свинец.....	0,42
Сталь.....	0,24 ... 0,30	Каучук.....	0,47
Медь.....	0,31 ... 0,34	Парафин.....	0,5

Пример 19.3. Стальной цилиндр (рис. 19.5) длиной $l = 100$ мм и диаметром $d = 40$ мм при сжатии укорачивается до размера $l_1 = 99,9$ мм, а диаметр его увеличивается до размера $d_1 = 40,01$ мм. Найти коэффициент Пуассона ν .

Решение. Определим относительную продольную и поперечную деформации $|\epsilon|$ и $|\epsilon'|$, если $\Delta l = l - l_1 = 0,1$ мм, а $\Delta d = d_1 - d = 0,01$ мм, тогда

$$\Delta l / l = |\epsilon|; \quad \Delta d / d = |\epsilon'|.$$

Отсюда коэффициент Пуассона

$$\nu = |\epsilon' / \epsilon| = l \Delta d / (d \Delta l).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\nu = 100 \cdot 0,01 / (40 \cdot 0,1) = 0,25.$$

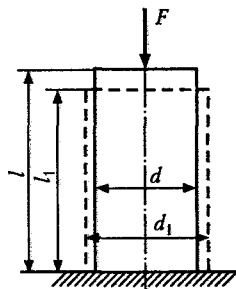


Рис. 19.5

19.4. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали

Механические характеристики материалов, т.е. величины, характеризующие их прочность, пластичность, упругость, твердость, а также упругие постоянные E и ν , необходимые конструктору для выбора материалов и расчетов проектируемых деталей, определяют путем механических испытаний стандартных образцов, изготовленных из исследуемого материала.

Большая заслуга в установлении единообразных во всем мире методов испытания материалов принадлежит русскому профессору Н.А.Белелюбскому (1845—1922) — президенту Международного общества испытания материалов.

Вопросы проведения лабораторных испытаний материалов в настоящей книге не излагаются, с ними читатель может ознакомиться в специальных учебных пособиях.

В данном подразделе мы подробно рассмотрим диаграмму, полученную в процессе наиболее распространенного и важного механического испытания — испытания на растяжение низкоуглеродистой стали (например, стали Ст3) при статическом нагружении.

В процессе этого испытания специальное устройство испытательной машины автоматически вычерчивает диаграмму, выражающую зависимость между растягивающей силой и абсолютным удлинением, т.е. в координатах $(F, \Delta l)$. Для изучения механических свойств материала независимо от размеров образца применяется диаграмма в координатах «напряжение—относительное удлинение» (σ, ϵ) . Эти диаграммы отличаются друг от друга лишь масштабами.

Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали представлена на рис. 19.6. Эта диаграмма имеет следующие характерные точки.

Точка *A* соответствует пределу пропорциональности.

Пределом пропорциональности $\sigma_{\text{пл}}$ называется то наибольшее напряжение, до которого деформации растут пропорционально нагрузке, т.е. справедлив закон Гука (для стали Ст3 $\sigma_{\text{пл}} \approx 200$ МПа).

Точка *A* практически соответствует и другому пределу, который называется пределом упругости.

Пределом упругости $\sigma_{\text{уп}}$ называется то наибольшее напряжение, до которого деформации практически остаются упругими.

Точка *C* соответствует пределу текучести.

Пределом текучести $\sigma_{\text{т}}$ называется такое напряжение, при котором в образце появляется заметное удлинение без увеличения нагрузки (для стали Ст3 $\sigma_{\text{т}} \approx 240$ МПа).

При достижении предела текучести поверхность образца становится матовой, так как на ней появляется сетка линий Людерса—Чернова, наклоненных к оси под углом 45° .

Линии Людерса—Чернова впервые были описаны в 1859 г. немецким металлургом Людерсом и независимо от него в 1884 г. русским металлургом Д. К. Черновым (1839—1921), предложившим использовать их при экспериментальном изучении напряжений в сложных деталях.

Предел текучести является *основной механической характеристикой* при оценке прочности *пластичных материалов*.

Точка *B* соответствует временному сопротивлению, или пределу прочности.

Временным сопротивлением $\sigma_{\text{в}}$ называется условное напряжение, равное отношению максимальной силы, которую выдерживает образец, к первоначальной площади его поперечного сечения (для стали Ст3 $\sigma_{\text{в}} \approx 400$ МПа).

При достижении временного сопротивления на растягиваемом образце образуется местное сужение — шейка, т.е. начинается разрушение образца.

В определении временного сопротивления говорится об условном напряжении, так как в сечениях шейки напряжения будут больше.

Пределом прочности $\sigma_{\text{н}}$ называется временное сопротивление образца, разрушающегося без образования шейки.

Предел прочности является *основной механической характеристикой* при оценке прочности *хрупких материалов*.

Точка *D* соответствует напряжению, возникающему в образце в момент разрыва во всех поперечных сечениях, кроме сечений шейки.

Точка *M* соответствует напряжению, возникающему в наименьшем поперечном сечении шейки в момент разрыва. Это напряжение можно назвать *напряжением разрыва*.

С помощью диаграммы растяжения в координатах (σ, ϵ) определим модуль упругости первого рода:

$$E = \sigma / \epsilon = AK \cdot \mu_{\sigma} / (OK \cdot \mu_{\epsilon}) = (\mu_{\sigma} / \mu_{\epsilon}) \operatorname{tg} \alpha,$$

где μ_{σ} — масштаб напряжений; μ_{ϵ} — масштаб относительных удлинений; α — угол, который составляет с осью абсцисс прямая линия диаграммы до предела пропорциональности.

Для большинства углеродистых сталей предел пропорциональности можно приблизительно считать равным половине временного сопротивления.

Деформация образца за пределом упругости состоит из упругой и остаточной, причем упругая часть деформации подчиняется закону Гука и за пределом пропорциональности (см. рис. 19.6). Если нагрузку снять, то образец укоротится в соответствии с прямой TF диаграммы. При повторном нагружении того же образца его деформация будет соответствовать диаграмме $FTBD$. Таким образом, при повторном растяжении образца, ранее нагруженного выше предела упругости, механические свойства материала меняются: повышается прочность (предел упругости и пропорциональности) и уменьшается пластичность. Это явление называется наклепом.

В некоторых случаях наклеп нежелателен (например, при пробивке отверстий под заклепки увеличивается возможность появления трещин возле отверстий), в других случаях наклеп создается специально (например, цепи подъемных машин, арматура железобетонных конструкций, провода, тросы подвергаются предварительной вытяжке за предел текучести). Проволока, полученная волочением, в результате наклепа имеет значительно большую прочность, чем точеный образец из того же материала.

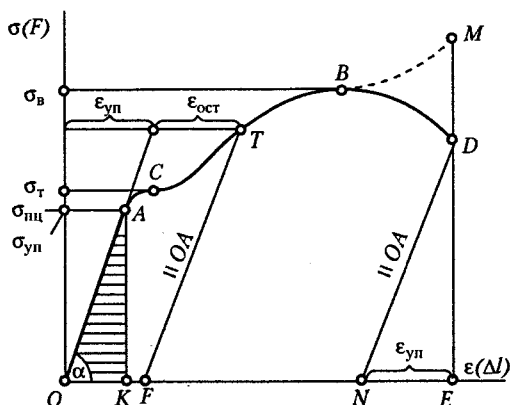


Рис. 19.6

Степень пластичности материала может быть охарактеризована (в процентах) остаточным относительным удлинением δ , %, и остаточным относительным сужением ψ , %, шейки образца после разрыва:

$$\delta = [(l_p - l_0) / l_0] 100;$$

$$\psi = [(A_0 - A_{ш}) / A_0] 100,$$

где l_0 — первоначальная длина образца; l_p — длина образца после разрыва; A_0 — первоначальная площадь поперечного сечения образца; $A_{ш}$ — площадь, наименьшего поперечного сечения шейки образца после разрыва.

Чем больше δ и ψ , тем пластичнее материал. Материалы, обладающие очень малой пластичностью, называют х р у п к и м и. Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести, у них при разрушении не образуется шейка.

Диаграмма сжатия стали до предела текучести совпадает с диаграммой растяжения, причем результаты испытаний сталей на растяжение и сжатие равноценны.

Результаты испытаний на растяжение и сжатие чугуна значительно отличаются друг от друга; предел прочности при растяжении в 3...5 раз ниже, чем при сжатии. Иными словами, *чугун значительно хуже работает на растяжение, чем на сжатие*.

Отметим, что ярко выраженную площадку текучести имеют только диаграммы растяжения низкоуглеродистой стали и некоторых сплавов цветных металлов. На рис. 19.7 показан для сравнения вид диаграмм растяжения сталей с различным содержанием углерода; из рисунка видно, что с повышением процента содержания углерода увеличивается прочность стали и уменьшается ее пластичность.

Для пластичных материалов, диаграммы растяжения которых не имеют ярко выраженной площадки текучести (средне- и высокоуглеродистые, легированные стали) или совсем ее не имеют (медь, дюралюминий), вводится понятие условного предела текучести — напряжения, при котором относительное остаточ-

ное удлинение образца равно 0,2%. Условный предел текучести также обозначим σ_r (иногда его обозначают $\sigma_{0,2}$).

Следует отметить, что деление материалов на пластичные и хрупкие условно, так как в зависимости от характера действующей нагрузки хрупкий материал может получить пластические свойства и, наоборот, пластич-

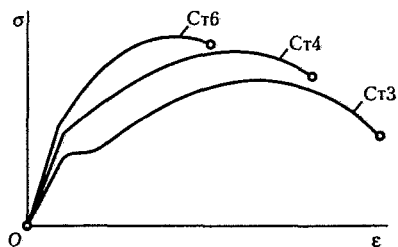


Рис. 19.7

ный материал приобретает свойства хрупкого. Так, например, деталь из пластичного материала при низкой температуре или при ударной нагрузке разрушается без образования шейки, как хрупкая.

19.5. Потенциальная энергия деформации при растяжении

При статическом растяжении образца растягивающая сила F , медленно возрастающая от нуля до какого-то значения, удлиняет образец на величину Δl и при этом совершает работу W . Эта работа аккумулируется в деформируемом образце в виде потенциальной энергии деформации U , причем, пренебрегая незначительными потерями энергии (например, тепловыми), можно считать, что

$$W = U.$$

Если диаграмма растяжения построена в координатах $(F, \Delta l)$, то, как известно из теоретической механики, площадь диаграммы выражает работу деформации. До предела пропорциональности работа выражается площадью треугольника OAK (см. рис. 19.6). Таким образом, потенциальная энергия упругой деформации стержня длиной l постоянного поперечного сечения A при одинаковой во всех сечениях продольной силе $N = F$ будет равна

$$U = W = F\Delta l / 2 = N^2 l / (2EA).$$

Полная работа, затрачиваемая на разрушение образца, выражается площадью фигуры $OABDN$ диаграммы растяжения, площадь треугольника NDE соответствует работе упругой деформации, исчезающей при разрыве образца.

Удельной потенциальной энергией деформации называется работа деформации, приходящаяся на единицу объема бруса:

$$u = W / V = W / (Al) = N^2 l / (2EA) : (Al) = \sigma^2 / (2E).$$

При одновременном действии нескольких растягивающих или сжимающих сил и ступенчатом изменении размеров поперечного сечения брус разбивают на отдельные участки, отличающиеся значением напряжения; потенциальную энергию деформации всего бруса определяют как сумму потенциальных энергий отдельных участков:

$$U = \sum U_i = \sum \sigma_i^2 V_i / (2E),$$

где σ_i — нормальные напряжения в поперечных сечениях на каждом участке; V_i — объем каждого участка бруса.

Потенциальная энергия деформации выражается в единицах работы — джоулях (Дж), удельная потенциальная энергия — в джоулях на кубический метр (Дж/м³).

Анализируя формулы потенциальной энергии деформации, можно сделать следующие выводы:

1. Потенциальная энергия деформации — величина всегда положительная, так как в ее выражения входят квадраты напряжений или продольных сил.

2. По этой причине при вычислении потенциальной энергии деформации нельзя применять принцип независимости действия сил (из математики известно, что квадрат суммы не равен сумме квадратов слагаемых).

19.6. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

В результате проведения механических испытаний устанавливают предельные напряжения, при которых происходит нарушение работы или разрушение деталей конструкции.

Предельным напряжением при статической нагрузке для пластичных материалов является *предел текучести*, для хрупких — *предел прочности*. Для обеспечения прочности деталей необходимо, чтобы возникающие в них в процессе эксплуатации напряжения были меньше предельных.

Отношение предельного напряжения к напряжению, возникающему в процессе работы детали, называют коэффициентом запаса прочности и обозначают буквой s :

$$s = \sigma_{\text{пред}} / \sigma, \text{ где } \sigma = N / A.$$

Очевидно, что недостаточный коэффициент запаса прочности не обеспечит надежности конструкции, а чрезмерный запас прочности приведет к перерасходу материала и утяжелению конструкции. *Сечение, для которого коэффициент запаса прочности наименьший, называется опасным.*

Минимально необходимый коэффициент запаса прочности называют допускаемым и обозначают $[s]$. Допускаемый коэффициент запаса прочности зависит от свойств, качества и однородности материала, точности представления о нагрузках, действующих на конструкцию, ответственности конструкции и многих других причин. Для пластичных материалов $[s] = 1,2 \dots 2,5$, для хрупких $[s] = 2 \dots 5$, для древесины $[s] = 8 \dots 12$.

Отношение предельного напряжения к допускаемому коэффициенту запаса прочности называют *допускаемым напряжением* и обозначают $[\sigma]$:

$$[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / [s].$$

Условие прочности детали конструкции заключается в том, что наибольшее возникающее в ней напряжение (рабочее) не должно превышать допускаемого:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Условие прочности можно записать в ином виде:

$$s \geq [s]$$

т.е. расчетный коэффициент запаса прочности не должен быть меньше допускаемого.

Ориентировочные значения допускаемых напряжений на растяжение и сжатие для некоторых материалов приведены в табл. 19.1.

Таблица 19.1

Материал	[σ], МПа	
	Растяжение	Сжатие
Чугун серый	28...80	120...150
Сталь углеродистая конструкционная	60...250	
Сталь легированная конструкционная	100...400 и выше	
Медь	30...120	
Латунь	70...140	
Бронза	60...120	
Дюралюминий	80...150	
Текстолит	30...40	50...90
Дуб (вдоль волокна)	9...13	13...15
Кирпичная кладка	До 0,2	0,6...2,5
Бетон	0,1...0,7	1...9

Если допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, то их обозначают соответственно $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$.

Расчетная формула при растяжении и сжатии имеет вид

$$\sigma = N/A \leq [\sigma]$$

и читается следующим образом: *нормальное напряжение в опасном сечении*, вычисленное по формуле $\sigma = N/A$, *не должно превышать допускаемое.*

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования расчетной формулы:

1) **проектный расчет**, при котором определяются размеры опасного сечения по формуле

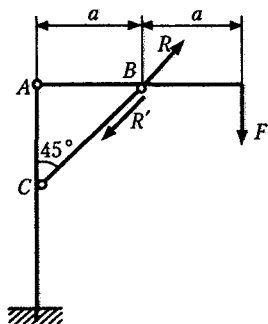


Рис. 19.8

$$A = N_{\max} / [\sigma];$$

2) проверочный расчет, при котором определяется рабочее напряжение и сравнивается с допускаемым по формуле

$$\sigma = N / A \leq [\sigma];$$

3) определение допускаемой нагрузки, которое ведется по формуле

$$[N] = A[\sigma].$$

Пример 19.4. Пренебрегая массой конструкции, определить размер дубового подкоса BC квадратного сечения (рис. 19.8). Крепления в точках A, B и C считать идеально гладкими шарнирами. Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $a = 1 \text{ м}$, $[\sigma] = 12 \text{ МПа}$.

Решение. Рассмотрим равновесие бруса AB. Из теоретической механики известно, что реакция прямолинейного стержня, закрепленного двумя концами в идеально гладких шарнирах, направлена вдоль стержня. Таким образом, реакция R подкоса BC направлена вдоль его оси. Подкос работает на сжатие.

Составим уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum M_A = 0; -F \cdot 2a + Ra \sin 45^\circ = 0.$$

Сокращая равенство на a , получим

$$R = 2F / \sin 45^\circ = 2 \cdot 10 / 0,707 = 28,4 \text{ кН}.$$

Далее воспользуемся расчетным уравнением при сжатии и определим площадь A поперечного сечения подкоса BC:

$$\sigma = R / A \leq [\sigma],$$

откуда

$$A = R / [\sigma] = 28,4 \cdot 10^3 / (12 \cdot 10^6) = 2370 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Так как подкос BC имеет квадратное сечение, то $A = b^2$, следовательно,

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{2370 \cdot 10^{-6}} = 48 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 48,6 \text{ мм}.$$

Округлив, принимаем $b = 50 \text{ мм}$.

19.7. Растяжение под действием собственного веса

Если ось бруса вертикальна, то собственный вес вызывает деформацию растяжения или сжатия. Рассмотрим брус постоянного сечения весом G , длиной l , закрепленный верхним концом и нагруженный только собственным весом G (рис. 19.9).

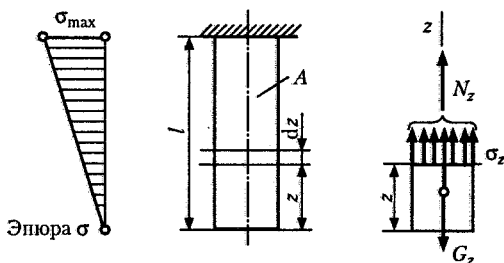


Рис. 19.9

Для определения напряжений в поперечном сечении на переменном расстоянии z от нижнего конца применим метод сечений. Рассмотрим равновесие нижней части бруса и составим уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; N_z - G_z = 0,$$

откуда

$$N_z = G_z = \gamma Az,$$

где γ — удельный вес материала бруса; A — площадь его поперечного сечения.

Напряжение

$$\sigma_z = N_z / A = \gamma Az / A = \gamma z.$$

Нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса постоянного сечения, растягиваемого лишь собственным весом, прямо пропорциональны расстоянию сечения от нижнего конца и не зависят от площади сечения.

Очевидно, что опасное сечение бруса будет находиться в заделке:

$$\sigma_{\max} = \gamma l.$$

Эпюра распределения нормальных напряжений вдоль оси бруса представляет собой треугольник (см. рис. 19.9).

Определим длину бруса постоянного сечения, при которой напряжение только от собственного веса достигает допустимого, и брус не может нести полезной нагрузки. Такая длина бруса называется предельной:

$$l_{\text{пр}} = [\sigma] / \gamma.$$

Если $\sigma_{\max}$ станет равным пределу прочности, то брус разрушится от собственного веса. Длина бруса, при которой он разрушается под действием собственного веса, называется критической:

$$l_{кр} = \sigma_B / \gamma.$$

Как видно из формул, предельная и критическая длины не зависят от площади поперечного сечения бруса.

Вычислим для примера критическую длину бруса из стали Ст2, у которой $\sigma_B = 360$ МПа, а удельная сила тяжести $\gamma = 7,85 \cdot 10^4$ Н/м²:

$$l_{кр} = \sigma_B / \gamma = 360 \cdot 10^6 / (7,85 \cdot 10^4) = 4600 \text{ м.}$$

Определим удлинение Δl бруса под действием собственного веса, для чего выделим бесконечно малый элемент длиной dz . Ввиду малости длины элемента будем считать, что в его пределах продольная сила N_z не изменяется. Применяв закон Гука, получим

$$d(\Delta l) = N_z dz / (EA) = \gamma A dz / (EA) = (\gamma / E) dz.$$

Проинтегрировав это выражение в пределах от 0 до l , получим

$$\Delta l = \int_0^l (\gamma / E) dz = (\gamma / E) \int_0^l dz = \gamma l^2 / (2E).$$

Так как

$$G = \gamma A l, \text{ то } \Delta l = G l / (2EA).$$

Удлинение бруса постоянного сечения под действием собственного веса в 2 раза меньше удлинения при растяжении силой, равной собственному весу и приложенной к концу бруса.

19.8. Статически неопределимые задачи

Задачи на расчет конструкций, в элементах которых внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью одних уравнений равновесия статики, называются статически неопределимыми.

Для решения таких задач помимо уравнений равновесия составляют уравнения перемещений или деформаций.

Изменение температуры деталей вызывает изменение их размеров, в результате чего в статически неопределимых системах возникают дополнительные напряжения, называемые температурными.

Рассмотрим невесомый стержень постоянного сечения площадью A , длиной l , жестко зашпеленный по концам (рис. 19.10). При

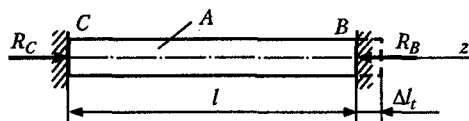


Рис. 19.10

нагревании в стержне возникнут температурные напряжения сжатия. Определим эти напряжения.

Составим для стержня уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; R_C - R_B = 0,$$

откуда получим, что реакции R_C и R_B равны, а применив метод сечений, установим, что продольная сила N в сечениях стержня равна неизвестным реакциям:

$$N = R_C = R_B.$$

Составим дополнительное уравнение, для чего мысленно отбросим правую заделку и заменим ее реакцией R_B , тогда дополнительное уравнение деформаций будет иметь вид

$$\Delta l_t = \Delta l_{CB},$$

т.е. температурное удлинение стержня равно его укорочению под действием реакции R_B , так как связи полагаются абсолютно жесткими.

Температурное удлинение

$$\Delta l_t = \alpha t l,$$

где α — коэффициент линейного расширения материала стержня.

Укорочение под действием реакции R_B :

$$\Delta l_{CB} = R_B l / (EA).$$

Приравняем правые части этих равенств:

$$\alpha t l = R_B l / (EA), \text{ откуда } R_B = \alpha t EA.$$

Определим температурные напряжения:

$$\sigma_t = R_B / A = \alpha t E.$$

Для того чтобы избежать температурных напряжений, которые могут достигать значительных величин, один конец мостов ставят на катки; в длинных трубопроводах, подвергающихся изменению температуры, делают компенсирующие устройства и т.д.

Пример 19.5. Абсолютно жесткая балка, изображенная на рис. 19.11, шарнирно укреплена в стене и подвешена горизонтально на двух шарнирно закрепленных, вертикально расположенных стальных стержнях равной длины $l = 2$ м. В точке D на балку действует сила $F = 20$ кН. Площади поперечных сечений стержней равны: $A_1 = 3$ см², $A_2 = 6$ см². Модуль упругости материала стержней — $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, сила тяжести балки — $G = 40$ кН. Определить напряжения в стержнях 1 и 2.

Решение. Рассматривая равновесие балки, отбросив связи и заменив их реакциями, получаем три неизвестных: реакцию R_A шарнира A и реакции R_C и R_B стержней 1 и 2.

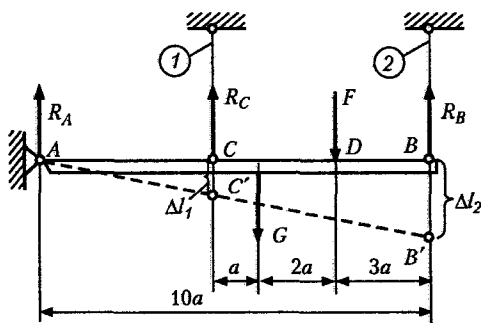


Рис. 19.11

Для данной системы параллельных сил можно составить лишь два уравнения равновесия: уравнение проекций сил на вертикальную ось и уравнение моментов относительно какой-либо точки; следовательно, система статически неопределима.

Для решения задачи необходимо составить дополнительное уравнение перемещений элементов конструкции, для чего изобразим ее в деформированном виде. Из подобия треугольников ACC' и ABB' получаем

$$\Delta l_1 / (4a) = \Delta l_2 / (10a),$$

откуда

$$\Delta l_2 = 2,5 \Delta l_1.$$

Составим уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum M_A = 0; + R_C \cdot 4a - G \cdot 5a - F \cdot 7a + R_B \cdot 10a = 0.$$

Упрощая последнее уравнение, получаем

$$4R_C + 10R_B = 5G + 7F.$$

По закону Гука

$$\Delta l_1 = R_C l / (EA_1); \Delta l_2 = R_B l / (EA_2).$$

Разделим второе равенство на первое:

$$\Delta l_2 / \Delta l_1 = R_B l EA_1 / (EA_2 R_C l) = R_B A_1 / (R_C A_2).$$

Так как $\Delta l_2 = 2,5 \Delta l_1$, а $A_2 = 2A_1$, то $2,5 = R_B / (2R_C)$,

откуда $R_B = 5R_C$.

Находим R_B и R_C :

$$4R_C + 50R_C = 5G + 7F; \quad 54R_C = 5 \cdot 40 + 7 \cdot 20 = 340,$$

откуда $R_C = 340/54 = 6,3 \text{ кН}$ и $R_B = 5R_C = 5 \cdot 6,3 = 31,5 \text{ кН}$.

Определяем напряжения σ_1 и σ_2 в стержнях:

$$\sigma_1 = R_C / A_1 = 6,3 \cdot 10^3 / (3 \cdot 10^{-4}) = 21 \cdot 10^6 \text{ Па} = 21 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = R_B / A_2 = 31,5 \cdot 10^3 / (6 \cdot 10^{-4}) = 52 \cdot 10^6 \text{ Па} = 52 \text{ МПа}.$$

19.9. Смятие. Контактные напряжения

Если детали конструкции, передающие значительную сжимающую нагрузку, имеют небольшую площадь контакта, то может произойти смятие поверхностей деталей. Смятие стараются предотвратить, например, под гайки и головки болтов подкладывают шайбы (рис. 19.12).

Для простоты расчетов полагают, что при контакте по плоскости возникают нормальные напряжения смятия, *равномерно распределенные по площади контакта*. Расчетное уравнение на смятие имеет вид

$$\sigma_{\text{см}} = F / A_{\text{см}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

где F — сжимающая сила; $[\sigma_{\text{см}}]$ — допускаемое напряжение на смятие; $A_{\text{см}}$ — площадь контакта.

Если соприкасающиеся детали сделаны из разных материалов, то на смятие проверяют деталь из более *мягкого* материала.

При контакте двух деталей по цилиндрической поверхности (например, заклепочное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложен (рис. 19.13), поэтому при расчете на смятие цилиндрических отверстий в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а значительно меньшую площадь диаметрального сечения отверстия (условная площадь смятия); тогда

$$A_{\text{см}} = d\delta,$$

где d — диаметр отверстия; δ — толщина соединяемой детали (высота цилиндра).

При различной толщине соединяемых деталей в расчетную формулу подставляют меньшую толщину.

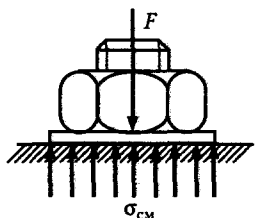


Рис. 19.12

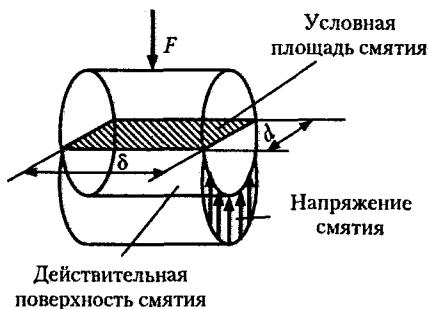


Рис. 19.13

В машиностроении допускаемые напряжения на смятие для болтовых, штифтовых и шпоночных соединений из низкоуглеродистой стали принимают в пределах 100 ... 120 МПа, для клепаных соединений — 240 ... 320 МПа, для древесины (сосна, дуб) — 2,4 ... 11 МПа в зависимости от сорта древесины и направления сжимающей силы по отношению к направлению волокон.

Пример 19.6. Тяга 1 соединена с вилкой 2 посредством болта, поставленного без зазора (рис. 19.14). Определить напряжения смятия в головке тяги, если сила $F = 48$ кН, диаметр болта $d = 20$ мм, а толщина головки тяги $\delta = 24$ мм.

Решение. Вычисляем условную площадь смятия:

$$A_{\text{см}} = d\delta = 20 \cdot 24 = 480 \text{ мм}^2.$$

Определяем напряжения смятия в головке тяги:

$$\sigma_{\text{см}} = F/A_{\text{см}} = 48 \cdot 10^3 / (480 \cdot 10^{-6}) = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа}.$$

Контактные напряжения. Контактными называются напряжения и деформации, возникающие при сжатии тел криволинейной формы, причем первоначальный контакт может быть линейным (например, сжатие двух цилиндров с параллельными образующими) или точечным (например, сжатие двух шаров). В результате деформации контактирующих тел начальный точечный или линейный контакт переходит в контакт по некоторой малой площадке. Решение вопросов о контактных напряжениях и деформациях впервые дано в работах немецкого физика Г.Герца (1857 — 1894).

Для деталей, в поверхностных слоях которых возникают контактные напряжения (например, фрикционные катки, зубчатые колеса, подшипники качения), решающую роль играет прочность рабочих поверхностей — контактная прочность.

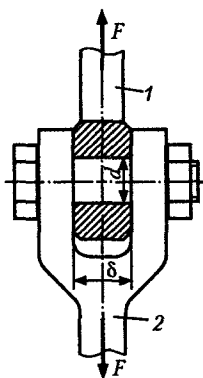


Рис. 19.14

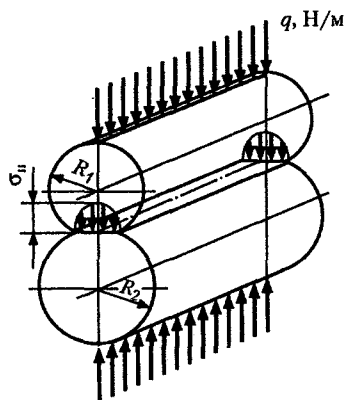


Рис. 19.15

Рассмотрим наиболее важный для нас случай контакта двух цилиндров с параллельными образующими (рис. 19.15). Определение контактных напряжений в этом случае производится по формуле Герца, выведенной в предположении, что материалы цилиндров подчиняются закону Гука. Очевидно, что контактные напряжения по ширине площадки контакта неравномерны. Максимальные напряжения σ_n определяются по формуле

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{qE_{\text{пр}}}{2\pi(1-\nu^2)\rho_{\text{пр}}}},$$

где q — нагрузка на единицу длины линии контакта; $E_{\text{пр}}$ — приведенный модуль упругости, получаемый из соотношения $\frac{2}{E_{\text{пр}}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$ ($1/E$ — некоторая характеристика податливости материала), откуда

$$E_{\text{пр}} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2};$$

ν — коэффициент Пуассона; $\rho_{\text{пр}}$ — приведенный радиус кривизны цилиндров, определяемый из соотношения $\frac{1}{\rho_{\text{пр}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ($1/\rho$ — кривизна поверхности), откуда

$$\rho_{\text{пр}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

При $\nu = 0,3$ формула Герца приобретает вид

$$\sigma_n = 0,418\sqrt{qE_{\text{пр}}/\rho_{\text{пр}}}.$$

Глава 20

СДВИГ (СРЕЗ)

20.1. Напряжения при сдвиге

Сдвигом называется такой вид деформации, при которой в любом поперечном сечении бруса возникает только поперечная сила. Деформацию сдвига можно наблюдать, например, при резке ножницами металлических полос или прутков (рис. 20.1, а).

Рассмотрим брус площадью поперечного сечения A , перпендикулярно оси которого приложены две равные и противоположно направленные силы F ; линии действия их параллельны и

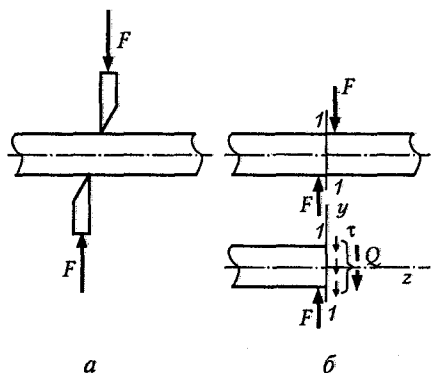


Рис. 20.1

находятся на относительно небольшом расстоянии друг от друга. Для определения поперечной силы Q применим метод сечений (рис. 20.1, б).

Во всех точках поперечного сечения действуют распределенные силы, равнодействующую которых определим из условия равновесия оставленной части бруса:

$$\sum Y = 0; F - Q = 0,$$

откуда определим поперечную силу

$$Q = F.$$

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении при сдвиге.

Естественно считать, что при сдвиге в поперечном сечении бруса действуют только касательные напряжения τ . Предполагаем, что эти напряжения распределены по сечению равномерно и, следовательно, их можно определить по формуле

$$\tau = Q/A.$$

Очевидно, что при сдвиге форма сечения на значение напряжения не влияет.

Примечание. Изложенный в этом подразделе расчет касательных напряжений при сдвиге приближенный, так как линии действия сил F и Q (см. рис. 20.1, б) не направлены по одной прямой и, строго говоря, эти силы не являются уравновешенной системой, а представляют собой пару сил. Однако момент этой пары (ввиду малого плеча) невелик, и соответствующими ей напряжениями можно пренебречь.

20.2. Расчеты на прочность при сдвиге

Условие прочности детали конструкции заключается в том, что наибольшее напряжение, возникающее в ней (рабочее напряжение), не должно превышать допускаемое.

Расчетная формула при сдвиге

$$\tau = Q/A \leq [\tau]$$

читается следующим образом: касательное напряжение при сдвиге, вычисленное по формуле $\tau = Q/A$, не должно превышать допускаемое.

По этой расчетной формуле проводят проектный и проверочный расчеты и определяют допускаемую нагрузку.

Деформация сдвига, доведенная до разрушения материала, называется **срезом** (применительно к металлическим деталям) или **скалыванием** (применительно к неметаллическим конструкциям).

Допускаемое напряжение на срез выбирают для пластичных материалов в зависимости от предела текучести. В машиностроении для штифтов, болтов, шпонок и т.п. принимают

$$[\tau_{ср}] = (0,25 \dots 0,35)\sigma_T.$$

Для древесины допускаемые напряжения на скалывание во врубках колеблются в пределах от 0,5 до 1,4 МПа и зависят от сорта дерева и направления врубки по отношению к направлению волокон.

При расчетах на срез в случае, если соединение осуществляется несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т.д.), полагают, что все они *нагружены одинаково*.

Расчеты соединений на срез обычно сопровождают проверкой прочности этих соединений на смятие.

Пример 20.1. Определить силу F , необходимую для пробивания квадратного отверстия размером $a = 25$ мм в стальной полосе толщиной $\delta = 10$ мм, если предел прочности при срезе $\tau_b = 360$ МПа. Определить напряжения сжатия в пуансоне (рис. 20.2).

Решение. Определим разрушающую нагрузку F :

$$F = \tau_b A_{ср}.$$

Площадь среза $A_{ср}$ равна площади боковой поверхности пробитого отверстия:

$$A_{ср} = 4a\delta = 4 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1000 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Следовательно, $F = \tau_b A_{ср} = 360 \cdot 10^6 \cdot 1000 \cdot 10^{-6} = 360 \cdot 10^3$ Н.

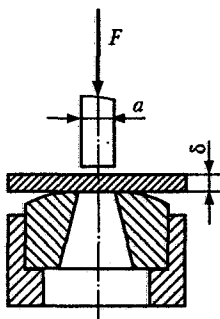


Рис. 20.2

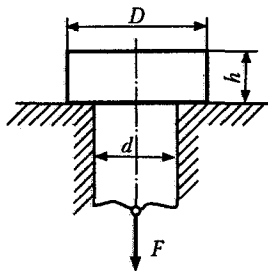


Рис. 20.3

Определим напряжения сжатия в пуансоне :

$$\sigma_c = F/A,$$

где A — площадь поперечного сечения пуансона;

$$A = a^2 = 25^2 \cdot 10^{-6} = 625 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

следовательно,

$$\sigma_c = F/A = 360 \cdot 10^3 / (625 \cdot 10^{-6}) = 576 \cdot 10^6 \text{ Па} = 576 \text{ МПа}.$$

Пример 20.2. Определить напряжения смятия и среза в головке стержня, растягиваемого силой $F = 100 \text{ кН}$. Дано: $D = 32 \text{ мм}$, $d = 20 \text{ мм}$, $h = 12 \text{ мм}$ (рис. 20.3).

Решение. Определим площадь смятия $A_{\text{см}}$ и площадь среза $A_{\text{ср}}$ головки. Площадь опорной поверхности головки, работающей на смятие, равна

$$A_{\text{см}} = \pi D^2/4 - \pi d^2/4 = \pi(D^2 - d^2)/4 = 3,14(32^2 - 20^2) \cdot 10^{-6}/4 = 490 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Площадь среза равна площади боковой поверхности цилиндра диаметром d и высотой h :

$$A_{\text{ср}} = \pi dh = 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 754 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Определим напряжения смятия и среза головки:

$$\sigma_{\text{см}} = F/A_{\text{см}} = 100 \cdot 10^3 / (490 \cdot 10^{-6}) = 204 \cdot 10^6 \text{ Па} = 204 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{ср}} = F/A_{\text{ср}} = 100 \cdot 10^3 / (754 \cdot 10^{-6}) = 133 \cdot 10^6 \text{ Па} = 103 \text{ МПа}.$$

Пример 20.3. В условиях примера 19.6 определить напряжения среза в болте (см. рис. 19.14).

Решение. Напряжения среза в болте определяем по формуле $\tau_{\text{ср}} = F/A_{\text{ср}}$. Площадь среза $A_{\text{ср}}$ представляет собой две площади поперечного сечения болта:

$$A_{\text{ср}} = 2\pi d^2/4 = \pi d^2/2,$$

следовательно,

$$\tau_{\text{ср}} = F/A_{\text{ср}} = 2F/(\pi d^2) = 2 \cdot 32 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 400 \cdot 10^{-6}) = 54 \cdot 10^6 \text{ Па} = 54 \text{ МПа}.$$

20.3. Деформация и закон Гука при сдвиге

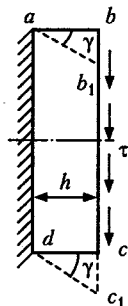


Рис. 20.4

Для установления параметров, характеризующих деформацию при сдвиге, рассмотрим элемент бруса в виде параллелепипеда $abcd$, на грани которого действуют только касательные напряжения τ , а противоположную грань параллелепипеда представим жестко заземленной (рис. 20.4). Деформация сдвига в указанном элементе заключается в перекашивании прямых углов параллелепипеда за счет поступательного перемещения грани bc по отношению к сечению, принятому за неподвижное. Деформация сдвига характеризуется углом γ и называется углом сдвига, или относительным сдвигом (так как этот параметр

не зависит от расстояния h , на котором происходит сдвиг). Величина bb_1 , на которую смещается подвижная грань относительно неподвижной, называется абсолютным сдвигом. Относительный сдвиг γ выражается в радианах.

Напряжения и деформации при сдвиге связаны между собой зависимостью, которая называется законом Гука при сдвиге.

Закон Гука при сдвиге справедлив лишь в определенных пределах нагружения и формулируется так: *касательное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу*.

Математически закон Гука можно записать в виде равенства

$$\tau = G\gamma.$$

Коэффициент пропорциональности G характеризует жесткость материала (т.е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге и называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода.

Модуль упругости и напряжение выражаются в одинаковых единицах:

$$[G] = [\tau] / [\gamma] = \text{Па}.$$

Приведем значения G , МПа, для некоторых материалов:

Чугун	$4,5 \cdot 10^4$
Сталь	$8,1 \cdot 10^4$
Медь	$(4,0 \dots 4,9) \cdot 10^4$
Латунь	$(3,5 \dots 3,7) \cdot 10^4$
Алюминий	$(2,6 \dots 2,7) \cdot 10^4$
Дерево	$0,055 \cdot 10^4$

В заключение отметим, что между тремя упругими постоянными E , G и ν существует следующая зависимость:

$$G = E / [2(1 + \nu)].$$

Принимая для сталей $\nu \approx 0,25$, получаем

$$G_{\text{ст}} \approx 0,4E_{\text{ст}}.$$

20.4. Закон парности касательных напряжений

Закон парности касательных напряжений формулируется так: *касательные напряжения в двух взаимно-перпендикулярных площадках, перпендикулярные их общему ребру, равны по модулю*.

Внутри тела вблизи некоторой точки вырежем элементарный параллелепипед с размерами dx , dy , dz (рис. 20.5, а).

Пусть на верхней грани этого параллелепипеда действует касательное напряжение τ . Сила, действующая в этой грани, равна

$$dQ = \tau dx dy.$$

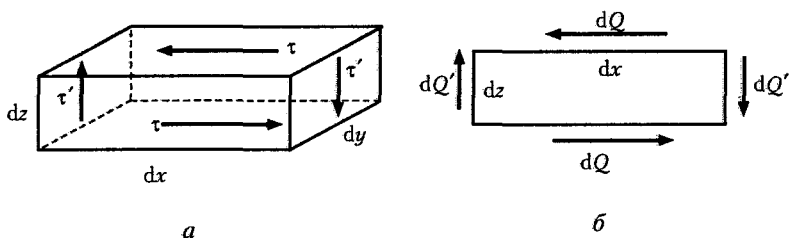


Рис. 20.5

Так как параллелепипед находится внутри тела в равновесии, то $\sum X = 0$, следовательно, на нижней грани параллелепипеда будет действовать такая же сила dQ , но направленная в противоположную сторону. Пара сил (dQ, dQ) будет стремиться вращать параллелепипед против часовой стрелки (рис. 20.5, б).

Так как параллелепипед находится в равновесии, то $\sum M_y = 0$, следовательно, пара сил (dQ, dQ) будет уравниваться какой-то другой парой с моментом, равным моменту первой пары. Естественно считать, что вторая пара образуется касательными напряжениями τ' , действующими на боковых (правой и левой) гранях параллелепипеда, причем $dQ' = \tau' dy dz$. Следовательно,

$$M(dQ, dQ) = M(dQ', dQ')$$

или

$$\tau dx dy dz = \tau' dx dy dz,$$

откуда

$$\tau = \tau'.$$

Обратим внимание на то, что *парные касательные напряжения в двух взаимно-перпендикулярных сечениях направлены либо к линии пересечения плоскостей сечений, либо от этой линии.*

20.5. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении.

Главные напряжения

Через всякую точку деформированного тела можно провести бесчисленное множество различно ориентированных секущих плоскостей.

Рассмотрим прямой брус постоянного поперечного сечения A , растягиваемый силами F (рис. 20.6, а). Рассечем брус плоскостью 1–1, проходящей через точку B и составляющей с поперечным сечением угол ϕ , отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней.

Очевидно, что равнодействующая N внутренних сил, действующих в наклонном сечении, будет равна растягивающей силе F :

$$N = F,$$

а напряжения p_ϕ будут параллельны оси бруса (рис. 20.6, б). Полагая, что напряжения p_ϕ распределены по наклонному сечению равномерно, получим

$$p_\phi = N / A_\phi,$$

где A_ϕ — площадь наклонного сечения.

Нормальные напряжения σ в поперечном сечении будут равны

$$\sigma = N / A.$$

Так как $A_\phi = A / \cos \phi$, то $p_\phi = N / A_\phi = N / (A / \cos \phi) = \sigma \cos \phi$.

Разложим полное напряжение p_ϕ в точке наклонного сечения на нормальное σ_ϕ и касательное τ_ϕ напряжения (рис. 20.6, в); тогда

$$\sigma_\phi = p_\phi \cos \phi = \sigma \cos^2 \phi;$$

$$\tau_\phi = p_\phi \sin \phi = \sigma \cos \phi \sin \phi = (\sigma/2) \sin 2\phi.$$

Отсюда следует вывод: при растяжении бруса в наклонных сечениях возникают равномерно распределенные по сечению нормальные и касательные напряжения и соответствующие этим напряжениям деформации растяжения и сдвига.

Рассмотрим частные случаи:

$$1) \phi = 0; \sigma_\phi = \sigma \cos^2 \phi = \sigma = \sigma_{\max}.$$

Нормальные напряжения имеют максимальное значение в поперечном сечении:

$$\tau_\phi = (\sigma/2) \sin 2\phi = 0.$$

Касательные напряжения в поперечном сечении равны нулю;

$$2) \phi = 45^\circ; \sigma_\phi = \sigma \cos^2 \phi = \sigma/2; \tau_\phi = (\sigma/2) \sin 2\phi = \sigma/2 = \tau_{\max}.$$

Касательные напряжения достигают своего максимального значения в сечениях, наклоненных к оси под углом 45° . Эти напряжения являются причиной появления на растягиваемом образце при достижении предела текучести сетки наклонных линий Людерса—Чернова;

$$3) \phi = 90^\circ; \sigma_\phi = 0; \tau_\phi = 0.$$

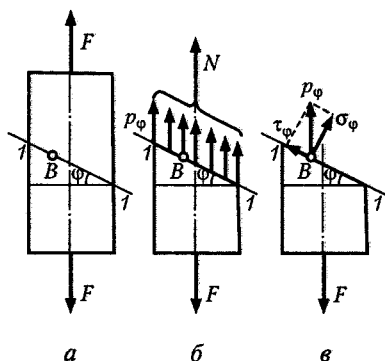


Рис. 20.6

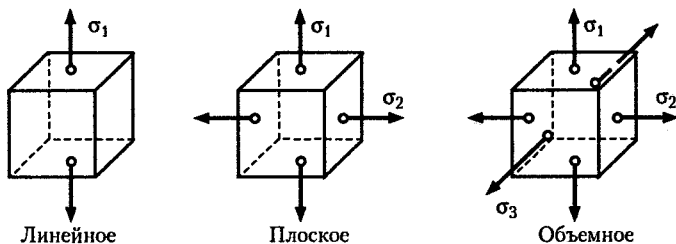


Рис. 20.7

В продольных сечениях бруса нет ни касательных, ни нормальных напряжений (вспомним гипотезу о ненадавливании волокон).

Из изложенного следует, что, говоря о напряжении в данной точке, всегда необходимо указать положение секущей плоскости, в которой это напряжение возникает.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, возникающих в бесчисленном множестве различно ориентированных площадок, проходящих через данную точку, характеризует *напряженное состояние в данной точке*.

Площадки, в которых *касательные напряжения равны нулю*, называются *главными площадками*, а возникающие в них нормальные напряжения — *главными напряжениями*. Как доказывается в теории упругости, в общем случае напряженного состояния в зоне исследуемой точки могут существовать три взаимно-перпендикулярные главные площадки.

В зависимости от числа таких площадок (где $\sigma \neq 0$) различают три основных вида напряженного состояния: *линейное* (одноосное), *плоское* (двухосное) и *объемное* (трехосное) (рис. 20.7).

В дальнейшем нас будут интересовать только первые два вида напряженного состояния.

Очевидно, что в рассмотренном случае одноосного растяжения главные площадки расположены в поперечном и продольном сечениях, т.е. взаимно-перпендикулярны. Обратим внимание также на

то, что *главные напряжения в данной точке имеют максимальное и минимальные значения*:

$$\sigma_{\max} = \sigma; \quad \sigma_{\min} = 0.$$

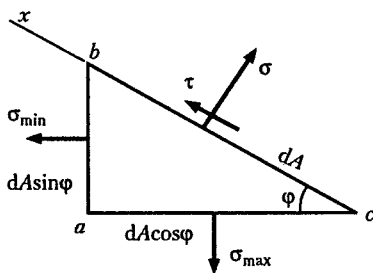


Рис. 20.8

В дальнейшем нам понадобится зависимость между не равными нулю главными напряжениями в двух взаимно-перпендикулярных площадках (случай плоского напряженного состояния) и макси-

мальными касательными напряжениями в наклонной (по отношению к главным) площадке.

Для вывода указанной зависимости внутри бруса вблизи некоторой точки вырежем бесконечно малую призму abc (рис. 20.8), у которой ab и ac — главные площадки, а $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ — главные напряжения. Площадь грани bc обозначим dA .

Рассмотрим равновесие призмы, для чего спроецируем действующие на ее гранях силы на ось x :

$$\sum X = 0; \tau dA + \sigma_{\min} dA \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_{\max} dA \cos \varphi \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$\tau = [(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2] \sin 2\varphi.$$

Из этого уравнения следует, что при $\varphi = 45^\circ$

$$\tau = \tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2.$$

Если $\sigma_{\min} = 0$, то $\tau_{\max} = \sigma_{\max} / 2$.

Если в случае плоского напряженного состояния в окрестности данной точки можно выделить элементарный параллелепипед таким образом, чтобы на его гранях действовали только равные между собой касательные напряжения (см. рис. 20.5, a), то такой вид напряженного состояния называется чистым сдвигом. В дальнейшем с чистым сдвигом мы встретимся при изучении теории кручения круглого цилиндра.

Глава 21

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

21.1. Статический момент площади

При некоторых деформациях прочность деталей зависит не только от площади поперечного сечения, но и от его формы. До сих пор мы изучали деформации, у которых напряжения зависели только от площади поперечного сечения. В дальнейшем для изучения деформаций кручения и изгиба нам потребуется знание некоторых других геометрических характеристик плоских фигур.

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на расстояния от них до этой оси (рис. 21.1).

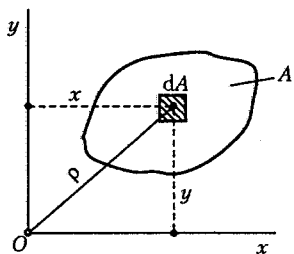


Рис. 21.1

Статический момент площади обозначим S с индексом соответствующей оси:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

В теоретической механике были выведены формулы для определения координат центра тяжести площади фигуры:

$$x_c = \frac{\sum (A_i x_i)}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i}.$$

Так как в этих формулах под A_i можно понимать площадь dA элементарной площадки, то в пределе при dA , стремящемся к нулю, выражения, стоящие в числителях правых частей формул, будут представлять собой статические моменты площади фигуры относительно осей y и x , а $\sum A_i$ есть площадь A всей фигуры. Следовательно,

$$S_y = \int_A x dA = x_c A; \quad S_x = \int_A y dA = y_c A.$$

Статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.

Единица статического момента площади

$$[S] = [x_c][A] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3.$$

Статический момент площади фигуры может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю.

Очевидно, что статический момент площади относительно оси, проходящей через центр тяжести площади фигуры (центральной оси), в том числе относительно оси симметрии фигуры, равен нулю.

В теоретической механике установлено также, что в формулах для определения координат центра тяжести площади под A_i можно понимать площади конечных частей фигуры, а под x_i и y_i — координаты центров тяжести этих частей (т.е. применять метод разбиения). Отсюда следует, что при определении статического момента площади сложной фигуры также можно применять метод разбиения, т.е. *определять статический момент* всей фигуры как *алгебраическую сумму* статических моментов отдельных ее частей:

$$S = \sum S_i,$$

где S_i — статический момент площади каждой части фигуры.

Понятие о статическом моменте площади понадобится нам в дальнейшем для определения положения центров тяжести сечений и при определении касательных напряжений при изгибе.

21.2. Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса, лежащего в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (см. рис. 21.1).

Полярный момент инерции обозначим

$$I_p = \int_A \rho^2 dA.$$

Единица полярного момента инерции

$$[I_p] = [\rho^2][A] = \text{м}^2 \cdot \text{м}^2 = \text{м}^4.$$

Полярный момент инерции — величина всегда положительная и не равная нулю.

Так как понятие полярного момента инерции понадобится нам при изучении деформаций кручения круглых валов, то выведем формулы для определения полярных моментов инерции круглого сплошного и кольцевого сечений, принимая за полюс центры этих фигур.

1. Круг диаметром d (рис. 21.2).

Выделим бесконечно малую площадку dA в виде кольца шириной $d\rho$, находящегося на расстоянии ρ от полюса (ρ — переменная величина). Тогда $dA = 2\pi\rho d\rho$. Определим полярный момент инерции:

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}; \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \end{aligned}$$

2. Кольцо размером $D \times d$:

$$\begin{aligned} I_p &= \int_F \rho^2 dF = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \\ &= 2\pi \int_{d/2}^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4); \end{aligned}$$

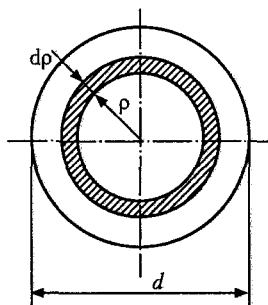


Рис. 21.2

$$I_p = (\pi/32)(D^4 - d^4) \approx 0,1(D^4 - d^4).$$

Полярный момент инерции кольцевого сечения *можно вычислить как разность* полярных моментов инерции большого и малого кругов.

21.3. Осевой момент инерции

Осевым моментом инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от них до этой оси (см. рис. 21.1).

Осевой момент инерции обозначим I с индексом, соответствующим оси:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

Очевидно, что осевой и полярный моменты инерции выражаются в одинаковых единицах:

$$[I] = \text{м}^4.$$

Осевой момент инерции — величина *всегда положительная и не равная нулю*.

Сложим моменты инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей x и y (см. рис. 21.1):

$$I_x + I_y = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A \rho^2 dA = I_p;$$

$$I_x + I_y = I_p.$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно-перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат.

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то *момент инерции сложной фигуры можно вычислять как сумму моментов инерции простых фигур*, на которые разбивают сложную фигуру. Понятие об осевых моментах инерции понадобится нам в дальнейшем при изучении теории изгиба.

Вычислим осевые моменты инерции некоторых простых фигур.

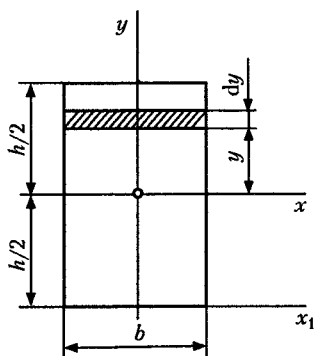


Рис. 21.3

1. Прямоугольник размером $b \times h$ (рис. 21.3).

Бесконечно малую площадку dA выделим в виде полоски шириной b и высотой dy , тогда $dA = bdy$:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = bh^3 / 12;$$

$$I_x = bh^3 / 12.$$

Для квадрата со стороной a $I_x = a^4 / 12$.

2. Круг диаметром d относительно осей x и y . В силу симметрии для круга $I_x = I_y$. Так как

$$I_x + I_y = I_p = \pi d^4 / 32,$$

то

$$I_x = I_y = I_p / 2 = \pi d^4 / 64 \approx 0,05 d^4.$$

3. Кольцо размером $D \times d$ относительно осей x и y :

$$I_x = I_y = (\pi / 64)(D^4 - d^4) \approx 0,05(D^4 - d^4).$$

21.4. Момент инерции при параллельном переносе осей

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Момент инерции относительно центральной оси называется центральным моментом инерции.

Теорема. Момент инерции относительно какой-либо оси равен сумме момента инерции относительно центральной оси, параллельной данной, и произведения площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Пусть дана произвольная плоская фигура, площадь которой A , центр тяжести расположен в точке C , а центральный момент инерции относительно оси x будет I_x . Вычислим момент инерции фигуры относительно оси x_1 , параллельной центральной и отстоящей от нее на расстоянии a (рис. 21.4):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA + \int_A (y+a)^2 dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA. \end{aligned}$$

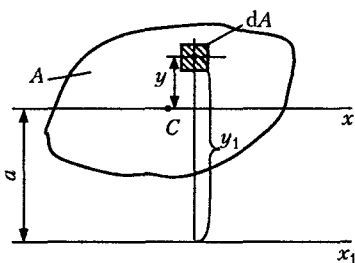


Рис. 21.4

Первое слагаемое правой части есть момент инерции фигуры относительно оси x , т. е. I_x ; второе слагаемое содержит статический момент площади относительно оси x , а он равен нулю, так как ось x — центральная; третье слагаемое после интегрирования будет равно $a^2 A$. В результате получим

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A;$$

теорема доказана.

Нужно помнить то обстоятельство, что последней формулой можно пользоваться только в тех случаях, когда одна из параллельных осей — центральная.

Анализируя полученную формулу, можно сделать вывод, что из ряда параллельных осей *момент инерции будет наименьшим относительно центральной оси.*

Пользуясь доказанной теоремой, выведем формулу для вычисления момента инерции прямоугольника относительно оси x_1 , проходящей через основание (см. рис. 21.3):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 A = bh^2/12 + \\ &+ h^2bh/4 = bh^3/3. \end{aligned}$$

21.5. Главные оси и главные моменты инерции

Представим себе плоскую фигуру, моменты инерции которой относительно осей координат равны I_x и I_y , а полярный момент инерции относительно начала координат равен I_p . Как было установлено ранее,

$$I_x + I_y = I_p.$$

Если оси координат поворачивать в своей плоскости вокруг начала координат, то полярный момент инерции останется неизменным, а осевые моменты инерции будут изменяться, причем

$$I_x + I_y = \text{const.}$$

Если сумма двух переменных величин остается постоянной, то одна из них уменьшается, а другая увеличивается. Следовательно, при каком-то положении осей один из осевых моментов достигает максимального, а другой — минимального значения.

Оси, относительно которых моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения, называются **главными осями инерции**.

Момент инерции относительно главной оси называется главным моментом инерции.

Если главная ось проходит через центр тяжести фигуры, то она называется главной центральной осью, а момент инерции относительно этой оси — главным центральным моментом инерции.

Особо важным является то обстоятельство, что если фигура имеет ось симметрии, то эта ось всегда будет одной из главных центральных осей.

Введем еще одну геометрическую характеристику плоского сечения.

Центробежным моментом инерции плоской фигуры называется взятая по всей площади фигуры сумма произведений элементарных площадок на произведение расстояний этих площадок до двух данных взаимно-перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int_A xy dA,$$

где x, y — расстояния от площадки dA до осей y и x .

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и в частном случае равным нулю.

Если взаимно-перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осью симметрии плоской фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю.

Центробежный момент инерции входит в формулы для определения положения главных осей несимметричных сечений.

В таблицах стандартных профилей прокатных сталей содержится геометрическая характеристика, которая называется радиусом инерции сечения и вычисляется по формулам:

$$i_x = \sqrt{I_x / A}, \quad i_y = \sqrt{I_y / A},$$

где I_x, I_y — осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей; A — площадь сечения.

Эта геометрическая характеристика используется при изучении внецентренного растяжения или сжатия, а также продольного изгиба.

Пример 21.1. Определить главные центральные моменты инерции таврового сечения, изображенного на рис. 21.5. Дано: $b_1 = 15$ мм, $h_1 = 120$ мм, $b_2 = 120$ мм, $h_2 = 30$ мм.

Решение. Геометрические характеристики сечений стандартных профилей прокатных сталей в таблицах ГОСТов (см., например, [7]) выражаются в сантиметрах, поэтому вычисления в этом примере также проведем в сантиметрах.

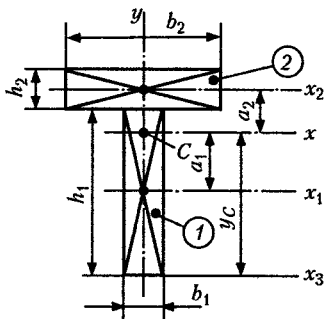


Рис. 21.5

Прежде всего определим положение центра тяжести C данного сечения, разделенного на два прямоугольника 1 и 2. Запишем статические моменты площади этих прямоугольников относительно оси x_3 и определим координату y_C центра тяжести C всего сечения ($x_C = 0$, так как сечение симметрично относительно оси y).

Обозначим площади прямоугольников A_1, A_2 , тогда

$$y_C = \frac{A_1 \cdot 0,5h_1 + A_2(h_1 + 0,5h_2)}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{1,5 \cdot 12 \cdot 0,5 \cdot 12 + 12 \cdot 3(12 + 0,5 \cdot 3)}{1,5 \cdot 12 + 12 \cdot 3} = 11 \text{ см.}$$

Поскольку заданное сечение симметрично относительно оси y , то эта ось является одной из главных центральных осей. Определим момент инерции I_y всего сечения как сумму моментов инерции прямоугольников 1 и 2, тогда

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} = \frac{h_1 b_1^3}{12} + \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{12 \cdot 1,5^3}{12} + \frac{3 \cdot 12^3}{12} = 435 \text{ см}^4.$$

Определим моменты инерции I_{x_1} и I_{x_2} прямоугольников 1 и 2 относительно собственных центральных осей x_1 и x_2 :

$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1,5 \cdot 12^3}{12} = 216 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{12 \cdot 3^3}{12} = 27 \text{ см}^4.$$

Применим теорему о моментах инерции относительно параллельных осей и определим главный центральный момент инерции I_x относительно центральной оси x , причем

$$a_1 = y_C - 0,5h_1 = 11 - 0,5 \cdot 12 = 5 \text{ см;}$$

$$a_2 = h_1 + 0,5h_2 - y_C = 12 + 0,5 \cdot 3 - 11 = 2,5 \text{ см;}$$

$$I_x = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2 = 216 + 5^2 \cdot 1,5 \cdot 12 + 27 + 2,5^2 \cdot 12 \cdot 3 = 918 \text{ см}^4.$$

Итак, главные центральные моменты инерции заданного сечения:

$$I_x = 918 \text{ см}^4; \quad I_y = 435 \text{ см}^4.$$

Глава 22

КРУЧЕНИЕ

22.1. Понятие о кручении круглого цилиндра

Кручением называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только крутящий момент.

Деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных оси, приложить пары сил. Моменты этих пар будем называть вращающими или скручивающими. Вращающий момент обозначается T .

Так как на кручение работают валы, обычно имеющие круглое или кольцевое сечение, то рассмотрим кручение круглого цилиндра (рис. 22.1).

Изготовим из резины (для большей наглядности) прямой круговой цилиндрический брус и жестко защемим один его конец; нанесем на его поверхности сетку линий, состоящую из образующих и окружностей, а затем приложим к свободному концу бруса пару сил, действующую в плоскости, перпендикулярной оси, т.е. подвергнем брус деформации кручения. При этом:

1) ось цилиндра, называемая осью кручения, останется прямолинейной;

2) диаметры окружностей, нанесенных на поверхности цилиндра до деформации, при деформации останутся такими же, и расстояние между окружностями не изменится;

3) образующие цилиндра обратятся в винтовые линии.

Из этого можно заключить, что при кручении круглого цилиндра справедлива гипотеза плоских сечений, а также предположить, что радиусы окружностей остаются при деформации прямыми. Так как в поперечных сечениях бруса нет продольных сил, то расстояния между сечениями не изменяются.

Из сказанного выше следует, что деформация кручения круглого цилиндра заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения. Угол поворота сечения равен углу закручива-

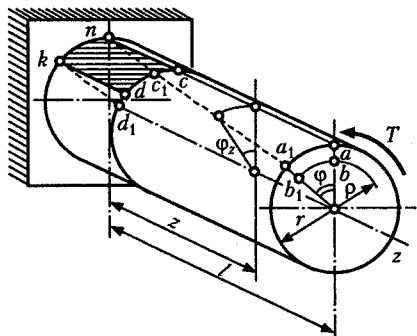


Рис. 22.1

ния части цилиндра, заключенной между данным сечением и заделкой. Угол φ поворота концевое сечения называется **полным углом закручивания цилиндра**.

Относительным углом закручивания φ_0 называется отношение угла закручивания φ к расстоянию z от данного сечения до заделки. Если брус длиной l имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце (т.е. состоит из одного участка), то

$$\varphi_0 = \varphi_z / z = \varphi / l = \text{const.}$$

Рассматривая тонкий слой материала на поверхности бруса, ограниченный любой ячейкой сетки (например, ячейкой *kncd* на рис. 22.1), видим, что эта ячейка при деформации перекашивается, принимая положение *knc₁d₁*.

Аналогичную картину мы наблюдали при изучении деформации сдвига.

На этом основании заключаем, что *при кручении* также возникает *деформация сдвига*, но не за счет поступательного, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого. Следовательно, при кручении в поперечных сечениях возникают только касательные внутренние силы, образующие крутящий момент.

Крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении.

22.2. Эпюры крутящих моментов

Для наглядного изображения распределения крутящих моментов вдоль оси бруса строят **эпюры крутящих моментов**.

Крутящий момент в сечениях бруса определяется с помощью метода сечений. Так как равномерно вращающийся вал, как и неподвижный брус, находится в равновесии, то очевидно, что внутренние силы, возникающие в поперечном сечении, должны уравнивать внешние моменты, действующие на рассматриваемую часть бруса. Отсюда следует, что *крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения*.

Эпюры крутящих моментов дают возможность определить опасное сечение. В частности, если брус имеет постоянное поперечное сечение, то опасными будут сечения на участке, где возникает наибольший крутящий момент.

Крутящий момент полагаем *положительным*, если при взгляде со стороны сечения результирующий момент внешних пар, приложенных к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в поперечном сечении, где приложен вращающий момент, значения крутящего момента меняются скачкообразно.

Пример 22.1. Для трансмиссионного вала (силовую передачу иногда называют трансмиссией), представленного на рис. 22.2, построить эпюры крутящих моментов. Вращающие моменты на шкивах равны: $T_1 = 600$ Н·м, $T_2 = 180$ Н·м, $T_3 = 300$ Н·м, $T_4 = 120$ Н·м. Индексом 1 обозначен ведущий шкив передачи.

Решение. Данный трансмиссионный вал состоит из пяти участков. Пользуясь методом сечений, определим внутренние силовые факторы на участках — крутящие моменты M_k . На первом и пятом участках крутящие моменты равны нулю, так как на этих участках вращающие моменты не приложены.

На втором участке

$$M_{k_2} = T_1 = 600 \text{ Н·м};$$

на третьем участке

$$M_{k_3} = T_1 - T_2 = 600 - 180 = 420 \text{ Н·м};$$

на четвертом участке

$$M_{k_4} = T_1 - T_2 - T_3 = 600 - 180 - 300 = 120 \text{ Н·м}.$$

Строим эпюру крутящих моментов, как показано на рис. 22.2, а.

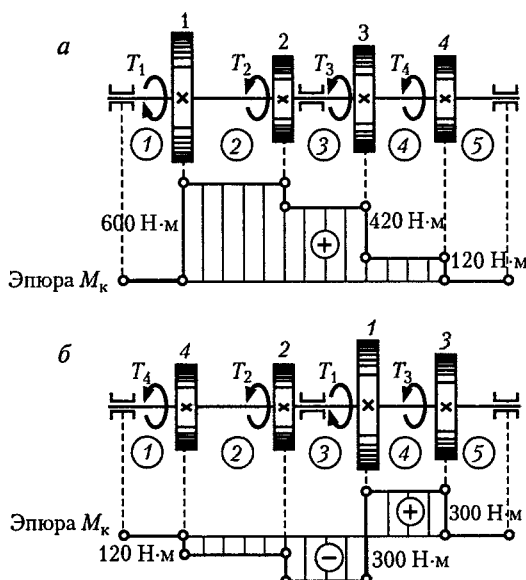


Рис. 22.2

Заметим, что «скачок» на эпюре крутящих моментов всегда численно равен значению вращающего момента, приложенного в рассматриваемом сечении.

Из эпюры видно, что наибольший крутящий момент будет на втором участке:

$$M_{\kappa \max} = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Рациональным размещением шкивов можно добиться уменьшения значения $M_{\kappa \max}$. На рис. 22.2, б изображена другая схема расположения шкивов и соответствующая эпюра M_{κ} , из которой видно, что значение крутящего момента $M_{\kappa \max} = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, т.е. в два раза меньше, чем в первом случае. Такое расположение шкивов позволяет передавать заданные мощности с помощью вала меньшего диаметра.

22.3. Напряжения и деформации при кручении

Представим себе, что прямой круговой цилиндр, подвергаемый деформации кручения, состоит из бесконечно большого количества волокон, параллельных оси. Полагаем, что при кручении справедлива гипотеза о ненадавливании волокон.

Зная, что при кручении происходит деформация сдвига, естественно считать, что в точках поперечного сечения бруса возникают только касательные напряжения τ , перпендикулярные радиусу, соединяющему эти точки с осью кручения. Существование нормальных напряжений в продольном сечении исключено, так как справедлива гипотеза о ненадавливании волокон; нормальные напряжения в поперечном сечении не возникают, так как нет продольной силы.

На рис. 22.1 видно, что абсолютный сдвиг сечения волокна a равен дуге aa_1 , а сечения волокна b — дуге bb_1 :

$$\cup bb_1 = \rho\varphi; \quad \cup aa_1 = r\varphi,$$

где ρ — расстояние от волокна b до оси кручения; φ — полный угол закручивания, рад; r — радиус цилиндра.

Так как радиусы сечения при кручении остаются прямыми, то величина абсолютного сдвига сечения волокон прямо пропорциональна их расстоянию от оси кручения.

Относительный сдвиг сечения волокна b

$$\gamma_p = \rho\varphi / l = \varphi_0 \rho.$$

Применим формулу закона Гука при сдвиге:

$$\tau_p = G\gamma_p = G\varphi_0 \rho.$$

При $\rho = 0$ $\tau = 0$, т.е. на оси кручения касательные напряжения равны нулю.

При $\rho = r$ $\tau = \tau_{\max}$, т.е. касательные напряжения достигают *максимального значения* у волокон, наиболее удаленных от оси кручения:

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r.$$

Так как относительный угол закручивания φ_0 есть величина постоянная для данного цилиндрического бруса, то касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от точек сечения до оси кручения. Эпюра распределения напряжений вдоль радиуса сечения имеет вид треугольника (рис. 22.3).

Если брус состоит из одного участка, т.е. имеет постоянное сечение и постоянный по длине участка крутящий момент, то касательные напряжения в данном волокне будут по всей длине цилиндра одинаковы.

Перейдем к выводу формул для определения угла закручивания и напряжений в поперечном сечении в зависимости от крутящего момента.

Рассечем брус, изображенный на рис. 22.1, поперечной плоскостью, находящейся на расстоянии z от заделки, и рассмотрим полученное сечение (см. рис. 22.3). Выделим в сечении бесконечно малую площадку dA на расстоянии ρ от оси кручения. Сила dQ , действующая на эту площадку, перпендикулярна радиусу и равна

$$dQ = \tau_\rho dA.$$

Определим момент внутренних сил относительно оси кручения, т.е. крутящий момент

$$M_k = \int_A dQ\rho = \int_A \tau_\rho dA\rho = \int_A G\varphi_0 \rho dA = G\varphi_0 \int_A \rho^2 dA = G\varphi_0 I_p,$$

откуда найдем относительный угол закручивания

$$\varphi_0 = M_k / (GI_p).$$

Полный угол закручивания φ , рад, цилиндра длиной l :

$$\varphi = M_k l / (GI_p).$$

Произведение GI_p называется жесткостью сечения при кручении.

Итак, мы установили, что полный угол закручивания круглого цилинд-

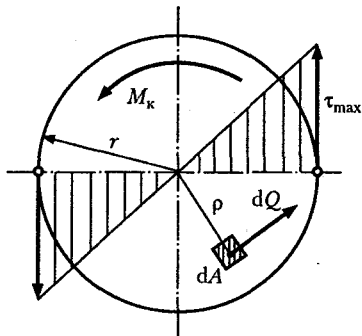


Рис. 22.3

дра прямо пропорционален крутящему моменту, длине цилиндра и обратно пропорционален жесткости сечения при кручении.

Так как при выводе последней формулы мы применяли закон Гука, она справедлива в пределах, когда нагрузка и деформация прямо пропорциональны.

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения, значением крутящего момента, полный угол закручивания равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков:

$$\varphi = \sum \varphi_i.$$

Выведем формулу для определения напряжений:

$$\tau_p = G\varphi_{\text{о}p} = GM_{\text{к}p}/(GI_p) = M_{\text{к}p}/I_p.$$

При $\rho = r$ напряжения достигнут максимального значения:

$$\tau_{\text{max}} = M_{\text{к}}r/I_p = M_{\text{к}}/(I_p/r) = M_{\text{к}}/W_p,$$

где $W_p = I_p/r$ — момент сопротивления сечения кручению (или полярный момент сопротивления).

Момент сопротивления кручению равен отношению полярного момента инерции к радиусу сечения.

Единица момента сопротивления кручению

$$[W_p] = [I_p]/[r] = \text{м}^3.$$

Итак, напряжения и деформации при кручении круглого цилиндра определяют по формулам

$$\tau_{\text{max}} = M_{\text{к}}/W_p; \quad \varphi = M_{\text{к}}l/(GI_p).$$

Обратим внимание на то, что эти формулы по структуре аналогичны формулам для определения напряжений и деформаций при растяжении, сжатии и применимы лишь для участков бруса, имеющих одинаковый материал, постоянные поперечное сечение и крутящий момент.

По закону парности касательных напряжений, последние возникают не только в поперечных, но и в продольных сечениях, поэтому, например, в деревянных брусках при кручении возникают трещины вдоль волокон (древесина плохо работает на скалывание вдоль волокон).

Из эпюры распределения касательных напряжений при кручении видно, что внутренние волокна бруса испытывают небольшие напряжения, поэтому валы иногда делают пустотелыми, чем достигается значительный выигрыш в массе при незначительной потере прочности.

Определим момент сопротивления кручению для круглого и кольцевого сечений.

1. Круг диаметром d :

$$W_p = I_p / (0,5d) = \pi d^4 / (32 \cdot 0,5d) = \pi d^3 / 16 \approx 0,2d^3.$$

2. Кольцо размером $D \times d$:

$$\begin{aligned} W_p &= I_p / (0,5D) = \pi(D^4 - d^4) / (32 \cdot 0,5D) = \\ &= \pi(D^4 - d^4) / (16D) \approx 0,2(D^4 - d^4) / D. \end{aligned}$$

Отметим, что если полярный момент инерции кольцевого сечения можно определить как разность моментов инерции большого и малого кругов, то момент сопротивления кручению *нельзя определить* как разность моментов сопротивлений этих кругов.

Пример 22.2. Стальной пруток длиной $l = 1$ м, диаметром $d = 4$ мм одним концом укреплен в зажиме, а на другом приложен скручивающий момент. При каком угле закручивания напряжение кручения будет равно 120 МПа? Модуль упругости второго рода $G = 8,2 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Запишем формулы, необходимые для решения задачи: полный угол закручивания круглого цилиндра

$$\varphi = M_k l / (GI_p);$$

максимальное напряжение при кручении

$$\tau_{\max} = M_k / W_p,$$

откуда $M_k = \tau_{\max} W_p$.

Учитывая, что полярный момент инерции $I_p = W_p d / 2$, и подставляя числовые значения, получаем

$$\varphi = \frac{\tau_{\max} W_p l \cdot 2}{GW_p d} = \frac{\tau_{\max} l \cdot 2}{Gd} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 2}{8,2 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 0,732 \text{ рад} \approx 42^\circ.$$

22.4. Расчеты на прочность и жесткость при кручении

Условие *прочности* бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допускаемое. Расчетная формула на прочность при кручении имеет вид $\tau = M_k / W_p \leq [\tau_k]$ и читается так: *касательное напряжение в опасном сечении*, определенное по формуле $\tau = M_k / W_p$, *не должно превышать допускаемое*.

Допускаемое напряжение при кручении выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении:

для сталей

$$[\tau_k] = (0,55 \dots 0,6)[\sigma_p];$$

для чугунов

$$[\tau_k] = (1 \dots 1,2)[\sigma_p].$$

Кроме требования прочности к валам предъявляется требование *жесткости*, заключающееся в том, что угол закручивания 1 м длины вала не должен превышать определенной величины во избежание, например, пружинения валов или потери точности ходовых винтов токарно-винторезных станков.

Допускаемый угол закручивания 1 м длины вала задается в градусах и обозначается $[\varphi_0^\circ]$. Расчетная формула на жесткость при кручении имеет вид

$$\varphi_0^\circ = \frac{180}{\pi} \frac{M_k}{GI_p} \leq [\varphi_0^\circ].$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от назначения вала; их обычно принимают в следующих пределах:

$$[\varphi_0^\circ] = 0,25 \dots 1 \text{ градус/м.}$$

С помощью полученных расчетных формул выполняют три вида расчетов конструкций на прочность и жесткость при кручении — проектный, проверочный и определение допускаемой нагрузки.

Пример 22.3. Определить диаметр стального вала, передающего мощность $P = 48$ кВт при частоте вращения $n = 980$ об/мин, если допускаемое напряжение кручения $[\tau_k] = 30$ МПа.

Решение. Расчетное уравнение на прочность при кручении круглого цилиндра имеет вид:

$$\tau_k = M_k / W_p \leq [\tau_k].$$

Определим угловую скорость вала:

$$\omega = \pi n / 30 = 3,14 \cdot 980 / 30 = 102,5 \text{ рад/с.}$$

Найдем крутящий момент:

$$M_k = P / \omega = 48 \cdot 10^3 / 102,5 = 464 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Определим момент сопротивления кручению:

$$W_p = M_k / [\tau_k] = 464 / 30 \cdot 10^6 = 15,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Находим требуемый диаметр вала из формулы

$$W_p = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3;$$

$$d = \sqrt[3]{W_p / 0,2} = \sqrt[3]{15,6 \cdot 10^{-6} / 0,2} = 43 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 43 \text{ мм.}$$

Округляя найденное значение диаметра до ближайшего большего стандартного значения, принимаем $d = 45$ мм.

Пример 22.4. Сравнить массы сплошного и полого валов, работающих при всех прочих равных условиях (передаваемая мощность, материал, допускаемое напряжение, условия работы), если диаметр сплошного вала

$d = 70$ мм, а отношение внутреннего и наружного диаметров полого вала $d_0/D = 0,9$.

Решение. Из расчетной формулы на кручение круглого цилиндра

$$\tau_{\kappa \max} = M_{\kappa} / W_p \leq [\tau_{\kappa}]$$

видно, что при всех прочих равных условиях моменты сопротивления кручению сплошного и полого валов будут равны, т.е.

$$0,2d^3 = 0,2(D^4 - d_0^4)/D.$$

Так как по условию $d = 70$ мм, а $d_0 = 0,9D$, получим равенство:

$$70^3 = (D^4 - 0,9D^4)/D = 0,334D^3,$$

откуда

$$D = 100 \text{ мм}; \quad d_0 = 0,9D = 90 \text{ мм}.$$

Массы сплошного и полого валов относятся как площади A_c и $A_{\text{п}}$ их поперечных сечений.

Определим эти площади:

$$A_c = \pi d^2 / 4; \quad A_{\text{п}} = \pi D^2 / 4 - \pi d_0^2 / 4 = \pi (D^2 - d_0^2) / 4.$$

Разделив первое равенство на второе, получим

$$A_c / A_{\text{п}} = d^2 / (D^2 - d_0^2) = 70^2 / (100^2 - 90^2) = 2,58.$$

Полый вал легче сплошного в 2,58 раза.

22.5. Потенциальная энергия деформации при кручении

Представим себе круглый цилиндрический брус постоянного сечения, жестко защемленный одним концом и нагруженный на другом конце моментом, приложенным статически, т.е. медленно возрастающим от нуля до какого-то значения T . Полагаем, что момент остается в пределах, когда нагрузка и деформация пропорциональны, т.е. справедлив закон Гука.

Момент T вызывает в брус деформацию кручения и при этом совершает работу W , которая аккумулируется в виде потенциальной энергии деформации U , причем, пренебрегая незначительными потерями энергии, можно считать, что

$$W = U.$$

Работа в случае статического нагружения равна

$$W = T\varphi / 2,$$

где φ — полный угол закручивания бруса.

Так как $T = M_{\kappa}$, то

$$U = W = T\varphi / 2 = M_{\kappa} M_{\kappa} l / (2GI_p) = M_{\kappa}^2 l / (2GI_p).$$

При одновременном действии нескольких моментов или ступенчатом изменении размеров поперечного сечения брус разбивают на участки и потенциальную энергию деформации всего бруса определяют как сумму потенциальных энергий отдельных его участков:

$$U = \sum U_i.$$

Анализируя полученную формулу, можно сделать выводы, аналогичные выводам подразд. 19.5.

22.6. Расчет цилиндрических винтовых пружин

В технике наиболее распространены цилиндрические винтовые пружины из стали круглого поперечного сечения, работающие на растяжение или сжатие. Покажем, как рассчитывают такие пружины, имеющие небольшой угол α подъема витков ($\alpha \leq 15^\circ$).

Рассмотрим цилиндрическую винтовую пружину с диаметром D винтовой оси, диаметром d проволоки и числом витков n , сжимаемую силой F (рис. 22.4, а).

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений. Рассечем пружину плоскостью, проходящей через ось, и отбросим нижнюю часть пружины (рис. 22.4, б). Ввиду того что угол α подъема витков мал, будем считать сечение витка поперечным, т. е. кругом диаметра d .

Рассматривая равновесие верхней части пружины, видим, что в поперечном сечении витка возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила $Q = F$ и крутящий момент $M_k = FD/2$. Отсюда следует, что в поперечном сечении витка действуют только касательные напряжения сдвига и кручения.

Будем считать, что напряжения сдвига распределены по сечению равномерно, а напряжения кручения определяются, как при кручении прямого кругового цилиндра. Эпюры распределения напряжений сдвига и кручения, а также эпюра суммарных напряжений в точках горизонтального диаметра сечения представлены на рис. 22.4, б.

Из суммарной эпюры видно, что наибольшие касательные напряжения возникают в точке В, ближайшей к оси пружины:

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{сд}} + \tau_{\text{к}} = \frac{Q}{A} + \frac{M_k}{W_p} = \frac{F}{\pi d^2/4} + \frac{FD/2}{\pi d^3/16};$$

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right).$$

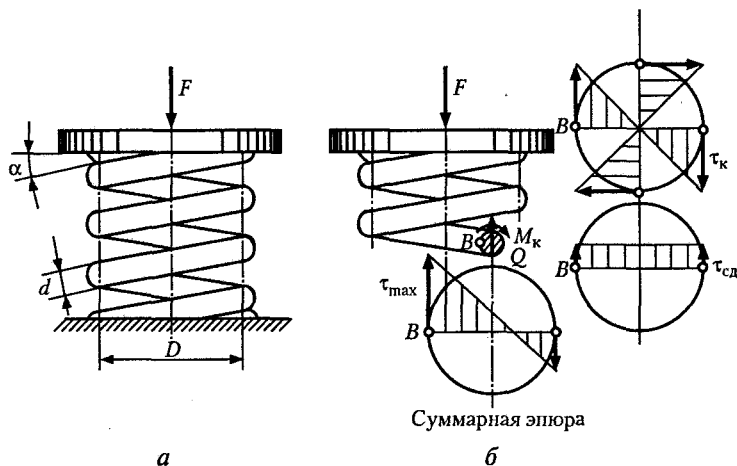


Рис. 22.4

Если пружина имеет относительно большой средний диаметр и изготовлена из относительно тонкой проволоки, то первое слагаемое в скобках (соответствующее напряжению сдвига) значительно меньше единицы и им можно пренебречь; тогда

$$\tau_{\max} \approx 8FD/(\pi d^3). \quad (22.1)$$

Формула для приближенного расчета цилиндрических винтовых пружин имеет вид

$$\tau_{\max} \approx 8FD/(\pi d^3) \leq [\tau].$$

Так как пружины обычно изготавливают из высококачественной стали, допускаемое напряжение берут в пределах

$$[\tau] = 200 \dots 1000 \text{ МПа.}$$

Далее выведем формулу для определения уменьшения высоты (осадки) λ пружины. Разбивая пружину на бесконечно малые участки длиной dl , которые ввиду малости длины будем считать прямолинейными, и учитывая только потенциальную энергию деформации кручения, получим:

$$U = \int_0^l M_k^2 dl / (2GI_p) = M_k^2 l / (2GI_p),$$

где $l = \pi Dn$ — длина проволоки пружины.

Работа силы F , приложенной к пружине статически, будет равна $W = F\lambda/2$. Так как $W = U$, $M_k = FD/2$, $I_p = \pi d^4/32$, то

$$\frac{F\lambda}{2} = \frac{(FD/2)^2 \pi D n}{2G\pi d^4 / 32},$$

откуда $\lambda = 8FD^3 n / (Dd^4)$.

Эту формулу можно записать в таком виде:

$$\lambda = F/c,$$

где $c = Gd^4 / (8D^3 n)$ — коэффициент жесткости пружины.

При $\lambda = 1$ $c = F$, поэтому коэффициент жесткости численно равен силе, вызывающей осадку, равную единице длины.

Отношение среднего диаметра витков к диаметру проволоки обозначают c_n и называют индексом пружины:

$$c_n = D/d.$$

Обычно индекс пружины $c_n = 4 \dots 12$.

При более точных расчетах винтовых пружин учитывают кривизну их витков и вводят в числитель формулы (22.1) поправочный коэффициент $K \approx 1 + 1,45 / c_n$.

Пример 22.5. Определить диаметр проволоки стальной пружины, если под действием силы $F = 800$ Н ее осадка $\lambda = 39$ мм. Индекс пружины $c_n = 6$, число витков $n = 14$. Модуль упругости $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, допускаемое напряжение $[\tau] = 450$ МПа.

Решение. Индекс пружины $c_n = \frac{D}{d}$, откуда $D = c_n d$. Подставим значение D в формулу для осадки пружины:

$$\lambda = 8FD^3 n / (Gd^4) = 8Fc_n^3 d^3 n / (Gd^4) = 8Fc_n^3 n / (Gd),$$

откуда найдем d и после подстановки числовых значений получим

$$d = \frac{8Fc_n^3 n}{\lambda G} = \frac{8 \cdot 800 \cdot 6^3 \cdot 14}{39 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 7 \text{ мм};$$

$$D = c_n d = 6 \cdot 7 = 42 \text{ мм}.$$

Глава 23

ИЗГИБ

23.1. Понятие о чистом изгибе прямого бруса

Чистым изгибом называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только *изгибающий момент*.

Деформация чистого изгиба будет, например, иметь место, если к прямому брусу в плоскости, проходящей через ось, приложить две равные по величине и противоположные по знаку пары сил.

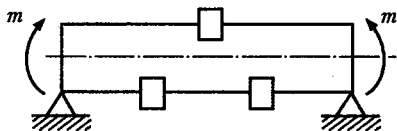


Рис. 23.1

На изгиб работают балки, оси, валы и другие детали конструкций (определение балки известно из теоретической механики). В дальнейшем почти всегда мы будем рассматривать такие брусья, у которых имеется по крайней мере одна плоскость симметрии и плоскость действия нагрузок совпадает с ней. В этом случае деформация изгиба происходит в плоскости действия внешних сил и изгиб называется **прямым** в отличие от косого изгиба, рассматриваемого в подразд. 23.9.

При изучении деформации изгиба будем мысленно представлять себе, что балка состоит из бесчисленного количества волокон, параллельных оси. Для того чтобы получить представление о деформации изгиба, проведем два опыта.

1. Балку, свободно лежащую на двух опорах, в верхней и нижней частях которой предварительно сделаны пазы и в них помещены точно пригнанные по размеру пазов бруски, подвергнем деформации изгиба (рис. 23.1). В результате этого бруски, расположенные на выпуклой стороне, выпадут из пазов, а бруски, расположенные на вогнутой стороне, будут зажаты.

2. На боковую поверхность призматического резинового (для большей наглядности) бруса прямоугольного сечения нанесем сетку продольных и поперечных прямых линий и подвергнем этот брус деформации чистого изгиба (рис. 23.2). В результате можно видеть следующее:

а) поперечные прямые линии останутся при деформации прямыми, но повернутся навстречу друг к другу;

б) продольные прямые линии, а также ось бруса искривятся;

в) сечения бруса расширятся в поперечном направлении на вогнутой стороне и сузятся на выпуклой стороне.

Из этих опытов можно сделать вывод, что *при чистом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений*; волокна, лежащие на выпуклой стороне, растягиваются, лежащие на вогнутой стороне — сжимаются, а на границе между

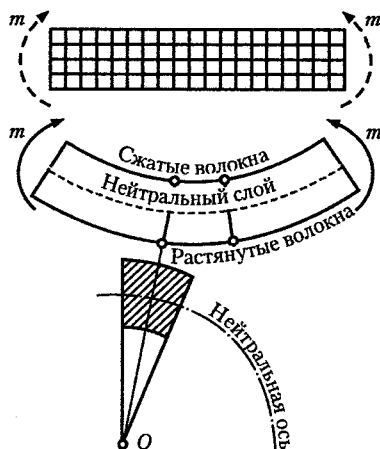


Рис. 23.2

ними лежит нейтральный слой волокон, которые только искривляются, не изменяя своей длины.

Полагая справедливой гипотезу о ненадавливании волокон, можно утверждать, что *при чистом изгибе в поперечном сечении бруса возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия, неравномерно распределенные по сечению.*

Искривление волокон и оси бруса происходит за счет неравномерного распределения нормальных напряжений по поперечному сечению.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью (н.о.)*. На нейтральной оси нормальные напряжения *равны нулю.*

23.2. Изгибающий момент и поперечная сила

Как известно из теоретической механики, опорные реакции балок определяют, составляя и решая уравнения равновесия статики для всей балки. Будем помнить, что при определении внутренних сил реакции связей учитываются наравне с активными внешними силами, действующими на балку.

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений, причем изображать балку будем только одной линией — осью, к которой приложены активные и реактивные силы. Рассмотрим два случая.

1. К балке приложены *две равные и противоположные по знаку пары сил* (рис. 23.3).

Рассматривая равновесие части балки, расположенной слева или справа от сечения 1—1, видим, что во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент M_n , равный внешнему моменту. Таким образом, это случай чистого изгиба.

Изгибающий момент есть результирующий момент относительно нейтральной оси внутренних нормальных сил, действующих в поперечном сечении балки.

Обратим внимание на то, что изгибающий момент имеет разное направление для левой и правой частей балки. Это говорит о *непригодности* правила знаков статики при определении знака изгибающего момента.

2. К балке приложены *активные и реактивные силы, перпендикулярные оси* (рис. 23.4).

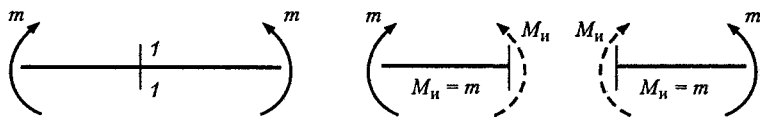


Рис. 23.3

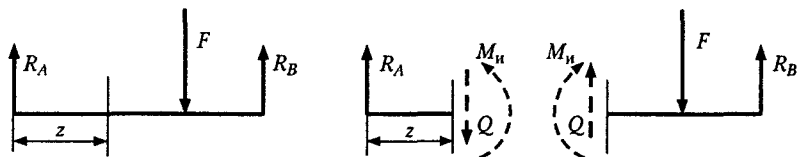


Рис. 23.4

Рассматривая равновесие частей балки, расположенных слева и справа, видим, что в поперечных сечениях должны действовать изгибающий момент M_n и поперечная сила Q . Из этого следует, что в рассматриваемом случае в точках поперечных сечений действуют не только нормальные напряжения, соответствующие изгибающему моменту, но и касательные, соответствующие поперечной силе.

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил в поперечном сечении балки.

Обратим внимание на то, что поперечная сила имеет противоположное направление для левой и правой частей балки, что говорит о *непригодности* правила знаков статики при определении знака поперечной силы.

Изгиб, при котором в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, называется *п о п е р е ч н ы м*.

В общем случае при поперечном изгибе изгибающий момент и поперечная сила в разных сечениях могут иметь неодинаковое значение.

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, алгебраическая сумма моментов всех активных и реактивных сил относительно любой точки равна нулю; следовательно, сумма моментов внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, *изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.*

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, перпендикулярных оси (т.е. системы параллельных сил), алгебраическая сумма всех внешних сил равна нулю; следовательно, сумма внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, *поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.*

Так как правила знаков статики неприемлемы для установления знаков изгибающего момента и поперечной силы, установим для них другие правила знаков, а именно:

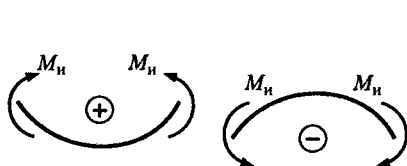


Рис. 23.5

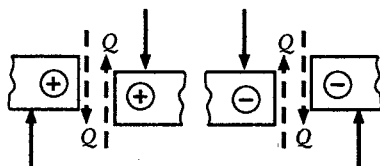


Рис. 23.6

если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, то *изгибающий момент* в сечении считается *положительным*, и наоборот, если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вверх, то *изгибающий момент* в сечении считается *отрицательным* (рис. 23.5);

если сумма внешних сил, лежащих *по левую сторону* от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх, то *поперечная сила* в сечении считается *положительной*, если равнодействующая направлена вниз, то *поперечная сила* в сечении считается *отрицательной*; для части балки, расположенной *справа* от сечения, знаки поперечной силы будут противоположными (рис. 23.6).

Пользуясь этими правилами, следует мысленно представлять себе *сечение балки жестко заземленным*, а связи отброшенными и замененными реакциями.

Подчеркнем, что для определения опорных реакций пользуются правилами знаков статики; для определения знаков изгибающего момента и поперечной силы — правилами знаков сопротивления материалов.

Правило знаков для изгибающих моментов иногда называют «правилом дождя» (имея в виду, что в случае выпуклости вниз образуется воронка, в которой задержится дождевая вода, и наоборот).

23.3. Дифференциальные зависимости при изгибе

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, основанные на *теореме Журавского*, названной по имени замечательного русского инженера-мостостроителя Д.И. Журавского (1821—1891). Эта теорема формулируется так: *поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки*.

Рассмотрим балку (рис. 23.7). Начало координат возьмем на левом конце балки, а ось z направим вправо (в дальнейшем это будет иметь существенное значение).

На одном из участков балки возьмем сечение с текущей координатой z и запишем уравнение изгибающего момента:

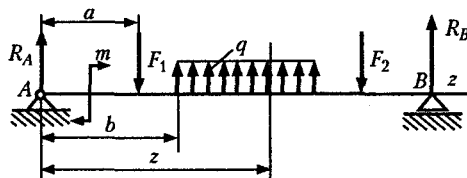


Рис. 23.7

$$M_n = R_A z + m - F_1(z - a) + q(z - b)^2 / 2.$$

Продифференцировав это выражение по координате z , получим

$$\frac{dM_n}{dz} = R_A - F_1 + q(z - b).$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть поперечная сила Q в сечении z . Таким образом,

$$\frac{dM_n}{dz} = Q;$$

теорема доказана.

Если уравнение изгибающих моментов (для участков с равномерно распределенной нагрузкой) продифференцировать вторично, то получим

$$\frac{d^2 M_n}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q,$$

т.е. вторая производная от изгибающего момента или первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Как известно из высшей математики, по знаку второй производной функции можно судить о выпуклости или вогнутости кривой; соответствующее правило следует использовать при построении эпюр.

23.4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Для наглядного изображения распределения вдоль оси балки поперечных сил и изгибающих моментов строят эпюры, которые дают возможность определить предположительно опасное сечение балки и установить значения поперечной силы и изгибающего момента в этом сечении.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить двумя способами.

Первый способ заключается в том, что сначала составляют аналитические выражения поперечных сил и изгибающих моментов для каждого участка как функций текущей координаты z поперечного сечения:

$$Q = f_1(z); \quad M_n = f_2(z).$$

Затем по полученным уравнениям строят эпюры.

Второй способ заключается в построении эпюр по характерным точкам и значениям поперечных сил и изгибающих моментов на границах участков. Применяя этот способ, в большинстве случаев можно обойтись без составления уравнений поперечных сил и изгибающих моментов. При наличии некоторого опыта второй способ предпочтительнее.

При построении эпюр следует руководствоваться приведенными ниже правилами:

1. Эпюру моментов строят на *сжатом волокне*, т.е. положительные моменты (и положительные поперечные силы) откладывают вверх от оси, а отрицательные — вниз.

2. Пользуясь принципом смягченных граничных условий, будем полагать, что в сечении, где приложена сосредоточенная сила, значение *поперечной силы* меняется скачкообразно, причем скачок равен модулю этой силы.

3. На том же основании будем полагать, что в сечении, где приложена пара сил (момент), значение *изгибающего момента* меняется скачкообразно, причем скачок равен моменту пары.

4. Правильность построения эпюр следует проверять с помощью теоремы Журавского.

Как известно из математики, если $M_n = f(z)$, то

$$\frac{dM_n}{dz} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, который составляет касательная к эпюре моментов с положительным направлением оси z .

Согласно теореме Журавского,

$$Q = \frac{dM_n}{dz} = \operatorname{tg} \alpha$$

(масштабы M_n и z полагаем численно равными единице), следовательно, если угол α острый, то $Q > 0$ и *изгибающий момент* на участке *возрастает*; если угол α тупой, то $Q < 0$ и *изгибающий момент* на участке *убывает*; если $\alpha = 0$ на всем участке, то $M_n = \text{const}$, $Q = 0$ и на этом участке возникает *чистый изгиб*; если $\alpha = 0$ в одной точке эпюры моментов, то в этом сечении $Q = 0$, а *изгибающий момент* имеет *экстремальное* (максимальное или минимальное) значение. В сече-

нии, где на эпюре поперечных сил имеется скачок, на эпюре изгибающих моментов будет резкое изменение направления касательной.

Чтобы правила знаков для изгибающих моментов и поперечных сил не противоречили знакам, полученным на основании теоремы Журавского, при проверке эпюр следует ось z мысленно всегда направлять слева направо.

5. На участке, где нет распределенной нагрузки, *эюра моментов* представляет собой *наклонную прямую*, а *эюра поперечных сил* — *прямую, параллельную оси*.

6. На участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, *эюра моментов* представляет собой *параболу*, а *эюра поперечных сил* — *наклонную прямую*.

7. На конце балки *изгибающий момент равен нулю*, если там не приложена пара сил.

8. При построении эпюр для консольных балок начало координат удобно брать на конце консоли, что нередко дает возможность обойтись без определения опорных реакций. В сечении, соответствующем заделке, *поперечная сила равна реактивной силе*, а *изгибающий момент — реактивному моменту*.

Пример 23.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, шарнирно закрепленной двумя концами и нагруженной сосредоточенной силой (рис. 23.8).

Решение. Начало координат поместим на левом конце балки, а ось направим вправо. Данная балка состоит из двух участков.

Определим опорные реакции R_A и R_B , составив уравнения моментов относительно опор A и B :

$$\sum M_A = 0; -Fa + R_B l = 0, \text{ откуда } R_B = Fa/l;$$

$$\sum M_B = 0; -R_A l + Fb = 0, \text{ следовательно, } R_A = Fb/l.$$

Проверим правильность определения реакций, составив уравнение проекций на ось y :

$$\sum Y = 0; R_A - F + R_B = 0;$$

$$Fb/l - F + Fa/l = F(a+b)/l - F = F - F = 0.$$

Полученное тождество $0 \equiv 0$ говорит о том, что реакции определены правильно.

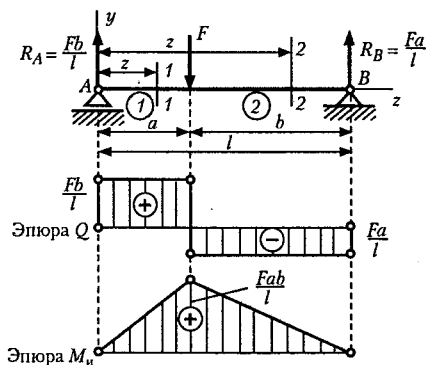


Рис. 23.8

Приступаем к построению эпюр, применяя для этого метод сечений.

Построение эпюры поперечных сил. На первом участке поперечная сила Q_1 положительна, постоянна и равна R_A , так как слева от сечения 1—1 других сил нет.

Откладываем вверх от оси эпюры в произвольном масштабе $Q_1 = R_A = Fb/l$; затем проводим прямую, параллельную оси эпюры.

Значение поперечной силы на втором участке будет равно Q_2 :

$$Q_2 = R_A - F = Fb/l - F = -F(l - b)/l = -Fa/l = -R_B$$

(то же получим, если рассмотрим часть балки, расположенную справа от сечения 2—2).

В точке приложения сосредоточенной силы F эпюра Q имеет скачок, численно равный F .

Вид эпюры Q показан на рис. 23.8.

Построение эпюры изгибающих моментов. В сечении 1—1 на первом участке изгибающий момент равен $M_{1н} = R_A z$, причем z изменяется от 0 до a . Поскольку z входит в это уравнение в первой степени, эпюра моментов будет представлять собой прямую линию.

Для построения эпюры $M_{1н}$ достаточно найти значения моментов на границах участка, т. е. при $z = 0$ и $z = a$:

при $z = 0$ $M_{1н} = 0$; при $z = a$ $M_{1н} = Fba/l$.

Для определения изгибающего момента в сечении 2—2 проще рассмотреть правую часть балки, на которую действует одна сила:

$$M_{2н} = R_B(l - z),$$

причем z меняется от a до l .

Эпюра моментов на втором участке также будет изображаться прямой линией. Найдем значения изгибающего момента на границах участка:

при $z = a$ $M_{2н} = Fa(l - a)/l = Fab/l$;

при $z = l$ $M_{2н} = Fa(l - l)/l = 0$.

По полученным значениям строим эпюру $M_{н}$. Наибольшее значение $M_{н}$ будет иметь в сечении, где приложена сила F :

$$M_{н \max} = Fab/l.$$

Это сечение будет предположительно опасным.

В частном случае, когда сила F приложена в середине балки,

$$a = b = l/2 \text{ и } M_{н \max} = Fl/4.$$

Пример 23.2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, шарнирно закрепленной двумя концами и нагруженной парой сил с моментом m (рис. 23.9).

Решение. Выберем начало координат на левой опоре, а ось z направим вправо. Балка имеет два участка. Так как пару сил можно уравновесить только парой, то

$$R_A = R_B = m/l.$$

Построение эпюры поперечных сил. Для всех сечений первого и второго участков поперечная сила Q будет постоянна, отрицательна и равна $Q = R_A = -m/l$. Следовательно, эпюра будет прямой линией, параллельной оси.

Построение эпюры изгибающих моментов. На первом участке $M_{1н} = -R_A z$, причем z меняется от 0 до a :

$$\text{при } z = 0 \quad M_{1н} = 0;$$

$$\text{при } z = a \quad M_{1н} = -R_A a = -ma/l.$$

На втором участке $M_{2н} = -R_A z + m$, причем z меняется от a до l :

$$\text{при } z = a \quad M_{2н} = -R_A a + m = -ma/l + m = mb/l;$$

$$\text{при } z = l \quad M_{2н} = -R_A l + m = -(m/l)/l + m = 0.$$

Эпюру M_n часто можно построить, не составляя уравнений, по значениям M_n на границах участков.

Пользуясь ранее приведенными правилами, устанавливаем, что на концах балки $M_n = 0$; в сечениях, бесконечно близких к паре сил слева и справа от нее, изгибающий момент

$$M_{1н} = -R_A a = -ma/l; \quad M_{2н} = R_B b = mb/l.$$

В точке приложения пары сил эпюра M_n имеет «скачок», величина которого равна моменту пары.

Построенная по найденным значениям эпюра M_n показана на рис. 23.9. Заметим, что на основании теоремы Журавского

$$\frac{dM_n}{dz} = Q = \text{tg } \alpha = \text{const},$$

следовательно, наклонные линии эпюры M_n на обоих участках должны быть параллельны между собой.

Полагая $b > a$, находим наибольшее значение изгибающего момента:

$$M_{n \max} = mb/l.$$

В частном случае, когда внешний момент m приложен в середине пролета балки,

$$a = b = l/2 \quad \text{и} \quad M_{n \max} = +m/2.$$

Пример 23.3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, свободно лежащей на двух опорах и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 23.10).

Решение. В силу симметричности распределения нагрузки по всей длине балки опорные реакции равны между собой:

$$R_A = R_B = ql/2.$$

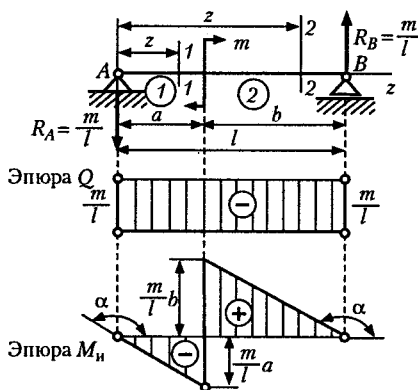


Рис. 23.9

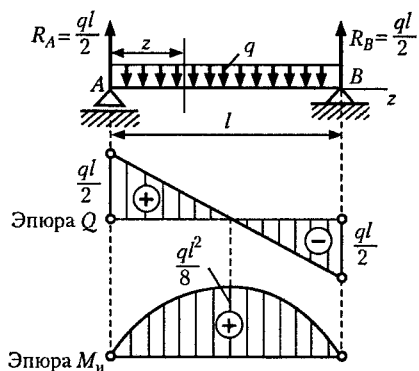


Рис. 23.10

Построение эпюры изгибающих моментов. Выражение для изгибающего момента в любом сечении балки имеет вид

$$M_n = R_A z - qz \frac{z}{2} = q \frac{l}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

Это уравнение параболы.

Определим значения M_n :

при $z = 0$ $M_n = 0$;

при $z = \frac{l}{2}$ $M_n = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$

Очевидно, что при $z = l$ $M_n = 0$.

По найденным значениям строим эпюру M_n , как показано на рис. 23.10.

Поскольку вторая производная

$$\frac{d^2 M_n}{dz^2} = -q,$$

т.е. меньше нуля, то эпюра M_n будет расположена выпуклостью вверх.

Согласно теореме Журавского максимальное значение изгибающего момента будет в середине пролета балки, где $Q = \frac{dM_n}{dz} = 0$:

$$M_{n \max} = ql^2/8.$$

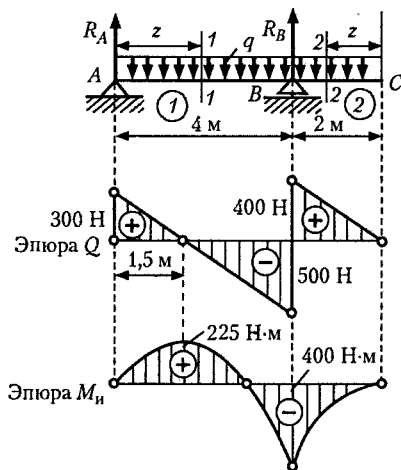


Рис. 23.11

Построение эпюры поперечных сил. Данная балка имеет один участок. В любом сечении поперечная сила

$$Q = R_A - qz = ql/2 - qz.$$

Поскольку z входит в это уравнение в первой степени (линейная зависимость), то эпюра Q будет прямолинейной. Для построения эпюры достаточно значений поперечной силы в двух точках:

при $z = 0$ $Q = ql/2$;

при $z = l$ $Q = ql/2 - ql = -ql/2.$

Эпюра Q показана на рис. 23.10.

Решение. Определим реакции R_A и R_B :

$$\sum M_A = 0; + R_B \cdot 4 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; R_B = 200 \cdot 6 \cdot 3 / 4 = 900 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0; - R_A \cdot 4 + q \cdot 6 \cdot 1 = 0; R_A = 200 \cdot 6 / 4 = 300 \text{ Н}.$$

Переходим к построению эпюры Q . Балка имеет два участка.

На первом участке поперечная сила $Q_1 = R_A - qz$, причем z меняется от 0 до 4 м:

$$\text{при } z = 0 \quad Q_1 = R_A = 300 \text{ Н};$$

$$\text{при } z = 4 \text{ м} \quad Q_1 = 300 - 200 \cdot 4 = 300 - 800 = -500 \text{ Н}.$$

Для упрощения построения эпюры Q на втором участке возьмем начало координат в точке C и направим ось z влево, тогда $Q_2 = qz$, причем z меняется от 0 до 2 м:

$$\text{при } z = 0 \quad Q_2 = 0;$$

$$\text{при } z = 2 \text{ м} \quad Q_2 = 200 \cdot 2 = 400 \text{ Н}.$$

На границе участков в точке B эпюра Q имеет «скачок», равный по величине опорной реакции $R_B = 900 \text{ Н}$.

Найдем точку оси, в которой $Q = 0$. Для этого запишем

$$Q_1 = R_A - qz = 0;$$

$$300 - 200z = 0; \quad z = 1,5 \text{ м}.$$

На основании теоремы Журавского можно ожидать в этой точке экстремальное значение изгибающего момента.

Переходим к построению эпюры $M_{из}$.

На первом участке выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M_{1из} = R_A z - qz^2/2.$$

Эпюра $M_{из}$ будет представлять собой параболу. Вычислим значения $M_{1из}$ в трех точках:

$$\text{при } z = 0 \quad M_{1из} = 0;$$

$$\text{при } z = 1,5 \text{ м} \quad M_{1из} = 300 \cdot 1,5 - 200 \cdot 1,5^2/2 = 450 - 225 = 225 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{при } z = 4 \text{ м} \quad M_{1из} = 300 \cdot 4 - 200 \cdot 4^2/2 = 1200 - 1600 = -400 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Для второго участка, взяв за начало координат точку C , получим

$$M_{2из} = -qz^2/2.$$

Вычислим значение $M_{2из}$ на границах участка:

$$\text{при } z = 0 \quad M_{2из} = 0;$$

$$\text{при } z = 2 \text{ м} \quad M_{2из} = -200 \cdot 2^2/2 = -400 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру $M_{из}$.

Поскольку в данном примере $\frac{d^2 M_{из}}{dz^2} = -q < 0$, эпюра $M_{из}$ на обоих участ-

ках будет направлена выпуклостью вверх.

Из построенных эпюр видно, что опасным будет сечение балки на опоре B .

23.5. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Как было установлено ранее, в поперечных сечениях балки при чистом изгибе возникают только нормальные напряжения растяжения и сжатия. Вопрос о распределении этих напряжений по поперечному сечению решается путем рассмотрения деформаций волокон балки.

Рассмотрим участок балки, подверженный деформации чистого изгиба. Двумя поперечными сечениями AB и CD выделим элемент балки бесконечно малой длины ds (рис. 23.12). Радиус кривизны нейтрального слоя обозначим ρ .

Рассмотрим слой волокон mn , находящийся на расстоянии y от нейтрального слоя NN . Это волокно в результате деформации изгиба удлинилось на величину nn_1 . Ввиду малости расстояния ds заштрихованные треугольники будем считать прямолинейными; эти треугольники подобны ($n_1F \parallel mE$):

$$\triangle OEF \sim \triangle Fnn_1.$$

Из подобия треугольников запишем равенство:

$$nn_1/ds = y/\rho.$$

Так как левая часть этого равенства есть относительное удлинение, т.е. $nn_1/ds = \epsilon$, то $y/\rho = \epsilon$.

Применив закон Гука при растяжении и сжатии $\sigma = E\epsilon$, получим

$$\sigma = Ey/\rho.$$

Из этой формулы видно, что нормальные напряжения при изгибе распределены по высоте сечения неравномерно: *максимальные напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси*. По ширине сечения нормальные напряжения не меняются. Распределение нормальных напряжений изображено на рис. 23.13.

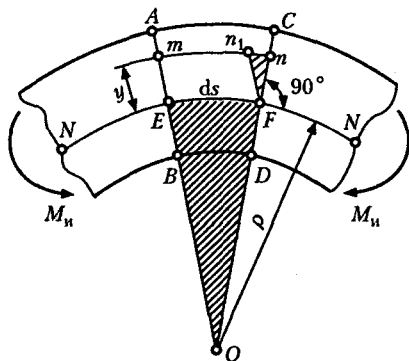


Рис. 23.12

Полученная формула для определения нормальных напряжений неудобна, так как в нее входит радиус кривизны нейтрального слоя. Для вывода формулы, связывающей нормальные напряжения с изгибающим моментом, применим метод сечений и рассмотрим равновесие части балки, изображенной на рис. 23.14.

В плоскости поперечного сечения выделим бесконечно ма-

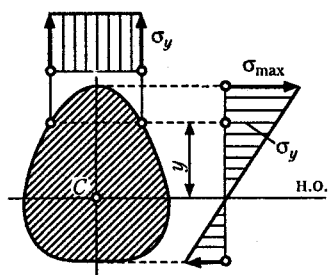
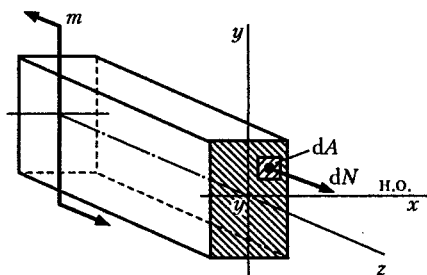


Рис. 23.13



23.14

лую площадку dA , в пределах которой будем считать нормальные напряжения σ постоянными; тогда нормальная сила dN , действующая на площадку dA , будет равна

$$dN = \sigma dA.$$

Составим два уравнения равновесия:

$$1) \sum Z = 0; \quad \int_A dN = 0$$

или

$$\int_A \sigma dA = \int_A \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

(ρ для данного сечения есть величина постоянная, поэтому она вынесена за знак интеграла). Так как E и ρ не равны нулю, то

$$\int_A y dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент площади сечения относительно оси x , т.е. нейтральной оси. Равенство нулю статического момента означает, что при изгибе *нейтральная ось проходит через центр тяжести площади поперечного сечения*;

$$2) \sum M_x = 0; \quad -m + \int_F y dN = 0.$$

Так как при чистом изгибе изгибающий момент равен внешнему моменту $M_{\text{и}} = m$, то

$$M_{\text{и}} = \int_A y dN = \int_A y \sigma dA = \int_A y \frac{E y}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA,$$

откуда

$$M_{\text{и}} = EI / \rho,$$

где $I = \int_A y^2 dA$ — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси; EI — жесткость сечения при изгибе.

Так как при чистом изгибе балки постоянного сечения $M_n = \text{const}$ и $I = \text{const}$, то

$$\rho = EI / M_n = \text{const}.$$

Следовательно, изогнутая ось такой балки представляет собой дугу окружности.

Выражение радиуса кривизны подставим в формулу для определения нормальных напряжений; тогда

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} = \frac{E y}{EI / M_n} = \frac{M_n y}{I}.$$

Максимальное значение нормальные напряжения будут иметь у волокон, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_n y_{\max}}{I} = \frac{M_n}{I / y_{\max}} = \frac{M_n}{W},$$

где $W = I / y_{\max}$ — момент сопротивления изгибу (или осевой момент сопротивления).

Момент сопротивления изгибу есть отношение осевого момента инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси к расстоянию от этой оси до наиболее удаленного волокна.

Единица момента сопротивления сечения изгибу $[W] = \text{м}^3$. Итак, наибольшие нормальные напряжения при чистом изгибе вычисляем по формуле

$$\sigma = M_n / W.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что эта формула по структуре аналогична формулам для определения напряжений при растяжении, сжатии, сдвиге и кручении.

23.6. Расчеты на прочность при изгибе

Условие прочности балки при изгибе заключается в том, что максимальное нормальное напряжение в опасном сечении не должно превышать допускаемое.

Полагая, что гипотеза о ненадавливании волокон справедлива не только при чистом, но и при поперечном изгибе, мы можем нормальные напряжения в поперечном сечении определять при поперечном изгибе по той же формуле, что и при чистом изгибе. Вопрос

о проверке прочности балки на касательные напряжения, а также о расчете балок на жесткость будет рассмотрен в последующих подразделах.

Расчетная формула на прочность при изгибе имеет вид

$$\sigma = M_{\text{и max}} / W \leq [\sigma]$$

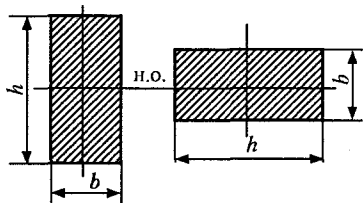


Рис. 23.15

и читается так: *нормальное напряжение в опасном сечении, определенное по формуле $\sigma = M_{\text{и max}} / W$, не должно превышать допускаемое. Допускаемое нормальное напряжение при изгибе выбирают таким же, как и при растяжении и сжатии.*

Максимальный изгибающий момент определяют из эпюр изгибающих моментов или расчетом.

Так как момент сопротивления изгибу W в расчетной формуле стоит в знаменателе, то чем больше W , тем меньше будут расчетные напряжения.

Определим моменты сопротивления изгибу наиболее распространенных сечений:

1. Прямоугольник размером $b \times h$ (рис. 23.15):

$$W_{\text{пр}} = \frac{I}{y_{\text{max}}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}.$$

Если балку прямоугольного сечения положить плашмя, то $W'_{\text{пр}} = hb^2/6$, тогда

$$\frac{W_{\text{пр}}}{W'_{\text{пр}}} = \frac{bh^2}{6} : \frac{hb^2}{6} = \frac{h}{b} > 1,$$

следовательно, при прочих равных условиях максимальные нормальные напряжения σ' у прямоугольной балки, положенной плашмя, будут больше, чем у той же балки, когда ее наибольший габаритный размер h вертикален (имеется в виду, что изгиб происходит в вертикальной плоскости).

Из этого следует правило: для обеспечения максимальной прочности ось, относительно которой момент инерции максимален, должна быть нейтральной.

2. Круг диаметром d :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

3. Кольцо размером $D \times d$:

$$W = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \cdot \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx 0,1 \frac{D^4 - d^4}{D}.$$

Момент сопротивления кольцевого сечения *нельзя определять* как разность моментов сопротивлений большого и малого кругов. Нетрудно подсчитать, что при одинаковой площади поперечного сечения, т.е. одинаковом расходе материала, момент сопротивления кольцевого сечения больше момента сопротивления сплошного круглого сечения.

Так как вблизи нейтральной оси материал мало напряжен, то *выгодно* больше материала *располагать дальше* от нейтральной оси. Поэтому в машиностроении редко применяют металлические балки прямоугольного сечения, но весьма широко распространены прокатные профильные балки таврового, двутаврового, углового, швеллерного и других сечений. Моменты инерции, моменты сопротивления и другие характеристики прокатных фасонных профилей стандартных размеров приведены в таблицах ГОСТа [7].

Для балок, материал которых *неодинаково* работает на растяжение и сжатие (например, чугун), целесообразно применять профили, не симметричные относительно нейтральной оси, например тавровый или П-образный. Так как у несимметричного профиля при изгибе возникают неодинаковые напряжения растяжения и сжатия, то сечение, например, чугунной балки выгодно располагать так, чтобы меньшие напряжения были в зоне растянутых, а большие — в зоне сжатых волокон (рис. 23.16).

Проведем сравнение экономичности по массе балок двутаврового, прямоугольного и квадратного сечений.

Предположим, что из расчетного уравнения мы определим момент сопротивления изгибу балки:

$$W = M_{\text{н макс}} / [\sigma] = 12 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1200 \text{ см}^3.$$

По таблицам ГОСТа выбираем двутавровый профиль № 45 с площадью поперечного сечения $A_{\text{дв}} = 83 \text{ см}^2$.

Определим размеры прямоугольного сечения, полагая $h = 2b$:

$$\begin{aligned} W &= bh^2 / 6 = b \cdot 4b^2 / 6 = \\ &= 2b^3 / 3 = 1200 \text{ см}^3, \end{aligned}$$

откуда $b = \sqrt[3]{1200 \cdot 3 / 2} = 12,2 \text{ см}$; $h = 2b = 24,4 \text{ см}$; $A_{\text{пр}} = bh = 12,2 \cdot 24,4 =$

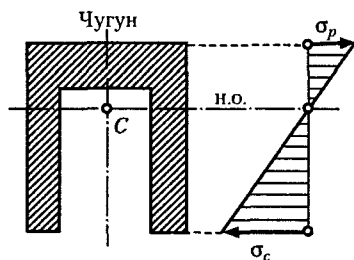
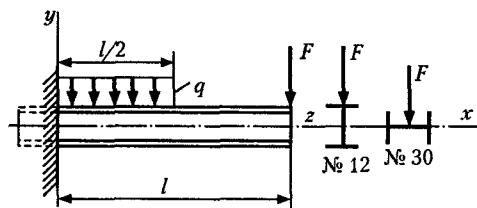


Рис. 23.16

Рис. 23.17



$= 297 \text{ см}^2$. При прочих равных условиях массы балок пропорциональны площадям поперечных сечений:

$$A_{\text{пр}} / A_{\text{дв}} = 297 / 83 \approx 3,5.$$

Балка *прямоугольного* сечения *в три с половиной раза тяжелее* балки *двутаврового* профиля при одинаковой прочности и прочих равных условиях.

Определим размеры квадратного сечения со стороной a : $W = a^3 / 6 = 1200 \text{ см}^2$, откуда $a = \sqrt[3]{1200 \cdot 6} = 19,4 \text{ см}$; $A_{\text{кв}} = a^2 = 375 \text{ см}^2$; $A_{\text{кв}} / A_{\text{дв}} = 375 / 83 \approx 4,5$.

Балка *квадратного* сечения *в четыре с половиной раза тяжелее* балки *двутаврового* профиля при одинаковой прочности и прочих равных условиях.

Пример 23.5. Определить номер профиля консольной балки двутаврового сечения, если допускаемое напряжение при изгибе $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$, $F = 2000 \text{ Н}$, $q = 4000 \text{ Н/м}$, $l = 2 \text{ м}$ (рис. 23.17).

Решение. Очевидно, что у данной балки, работающей на изгиб, максимальный изгибающий момент будет в заделке и определится по формуле

$$M_{\text{и max}} = -Fl - ql^2 / 8.$$

Подставив данные, получим абсолютное значение момента

$$M_{\text{и max}} = 2000 \cdot 2 + 4000 \cdot 4 / 8 = 6000 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Расчетное уравнение на прочность при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\text{max}} = M_{\text{и max}} / W_x \leq [\sigma],$$

откуда

$$W_x = M_{\text{и max}} / [\sigma] = 6000 / (120 \cdot 10^6) = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 50 \text{ см}^3.$$

Найдя по таблицам сортамента ближайшее большее значение для W_x , выбираем двутавровое сечение № 12, для которого $W_x = 58,4 \text{ см}^2$. Если сечение балки повернуть на 90° , т.е. расположить полки вертикально, а стенку — горизонтально (см. рис. 23.17), то потребуется профиль № 30 (при таком расположении сечения двутавр подбирается по W_y). В этом случае балка окажется в три раза тяжелее.

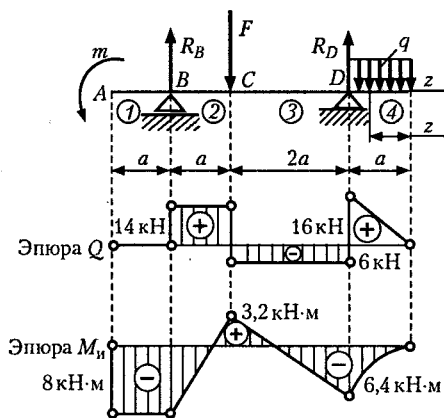


Рис. 23.18

Пример 23.6. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки, изображенной на рис. 23.18, если $F = 20 \text{ кН}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $m = 8 \text{ кН·м}$, $a = 0,8 \text{ м}$. Проверить балку на прочность, если ее профиль — двутавр № 20, а допускаемое напряжение $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$.

Решение. Определим опорные реакции R_B и R_D , составив уравнение моментов относительно точек B и D :

$$\sum M_B = 0;$$

$$m - Fa + R_D \cdot 3a - qa \cdot 3,5a = 0.$$

Подставив данные и произведя вычисления, получим $R_D = 22 \text{ кН}$;

$$\sum M_D = 0;$$

$$m - R_B \cdot 3a + F \cdot 2 - qa \cdot 0,5a = 0.$$

Подставив данные и произведя вычисления, получим $R_B = 14 \text{ кН}$.

Построим эпюру Q . На первом участке $Q_1 = 0$, так как алгебраическая сумма сил пары всегда равна нулю.

На втором участке $Q_2 = R_B = 14 \text{ кН}$.

На третьем участке $Q_3 = R_B - F = 14 - 20 = -6 \text{ кН}$.

На этих участках эпюра Q изображается прямыми линиями, параллельными оси.

Четвертый участок рассмотрим, взяв начало координат на правом конце балки:

$Q_4 = qz$, где z изменяется от 0 до a :

при $z = 0$ $Q_4 = 0$;

при $z = a$ $Q_4 = qa = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ кН}$.

Эпюра изображается прямой наклонной линией.

В точке D эпюра Q имеет скачок, равный опорной реакции R_D .

Построим эпюру $M_{\text{и}}$. На первом участке

$$M_{1\text{и}} = -m = -8 \text{ кН·м}.$$

На втором и третьем участках строим эпюру по значениям изгибающего момента на границах участков:

в сечении B

$$M_{2\text{и}} = -m = -8 \text{ кН·м};$$

в сечении C

$$M_{2\text{и}} = -m + R_B a = -8 + 14 \cdot 0,8 = 3,2 \text{ кН·м};$$

в сечении D

$$M_{3\text{и}} = -m + R_B \cdot 3a - F \cdot 2a = -8 + 14 \cdot 3 \cdot 0,8 - 20 \cdot 2 \cdot 0,8 = -6 \text{ кН·м}.$$

На первых трех участках эпюра $M_{\text{и}}$ изображается прямыми линиями. Для построения эпюры $M_{\text{и}}$ на четвертом участке начало координат возьмем на правом конце балки, тогда

$$M_{4\text{и}} = -qz^2/2, \text{ где } z \text{ изменяется от } 0 \text{ до } a;$$

$$\text{при } z = 0 \quad M_{4\text{и}} = 0;$$

$$\text{при } z = a \quad M_{4\text{и}} = -qa^2/2 = -20 \cdot 0,8^2/2 = -6,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На четвертом участке эпюра $M_{\text{и}}$ — дуга параболы.

Проверим балку на прочность. Наибольший изгибающий момент будет на первом участке:

$$|M_{\text{и max}}| = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчетная формула на прочность при изгибе:

$$\sigma = M_{\text{и max}}/W_x \leq [\sigma].$$

По таблицам сортамента находим значение момента сопротивления для двутавра № 20:

$$W_x = 184 \text{ см}^3 = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Подставляя значения и учитывая размерности, получим

$$\sigma = \frac{8 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} \approx 44 \cdot 10^6 \text{ Па} = 44 \text{ МПа} < 150 \text{ МПа}.$$

Условие прочности $\sigma < [\sigma]$ выполнено. В данном случае балка работает с большой недогрузкой, следовательно, балку можно изготовить из двутавра меньшего размера, например № 14.

23.7. Касательные напряжения при изгибе

Как было установлено ранее, в поперечных сечениях балки при поперечном изгибе возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, вызывающие деформации сдвига. В силу закона парности такие же касательные напряжения будут возникать и в продольных сечениях, параллельных нейтральному слою. Наличие касательных напряжений в продольных сечениях подтверждается появлением в деревянных балках при поперечном изгибе продольных трещин.

Перейдем к выводу формулы для определения касательных напряжений при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения. Эта формула была выведена в 1855 г. русским инженером-мостостроителем Д.И. Журавским. Потребность в такой формуле была вызвана тем, что в XIX в. при строительстве мостов широко применялись деревянные конструкции, а балки из древесины обычно имеют прямоугольное сечение и плохо работают на скалывание вдоль волокон.

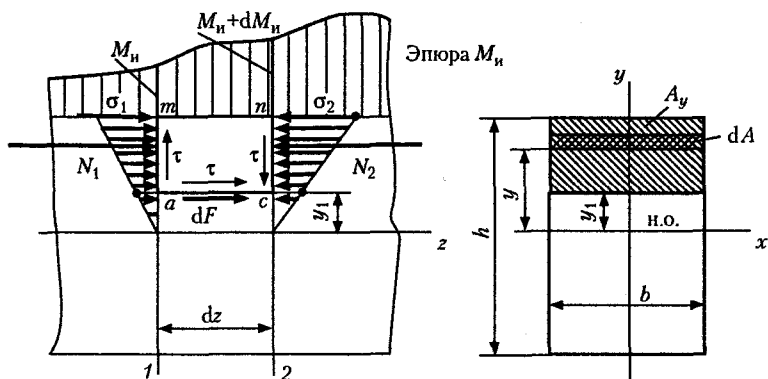


Рис. 23.19

Рассмотрим балку прямоугольного сечения $b \times h$ (рис. 23.19). Пусть в поперечном сечении 1 действует изгибающий момент M_n , а в сечении 2, отстоящем от первого на бесконечно близком расстоянии dz , — изгибающий момент $M_n + dM_n$. На расстоянии y_1 от нейтральной оси проведем продольное сечение ac и рассмотрим равновесие элементарного параллелепипеда $amnc$, имеющего измерения $b \times dz \times \left(\frac{h}{2} - y_1\right)$.

Равнодействующую нормальных внутренних сил, действующих на грань am , обозначим N_1 , а действующих на грань cn — N_2 ; переменные нормальные напряжения в этих гранях обозначим соответственно σ_1 и σ_2 .

В поперечном сечении балки выделим бесконечно узкую полоску dA , находящуюся на переменном расстоянии y от нейтральной оси, тогда

$$N_1 = \int_{A_y} \sigma_1 dA = \int_{A_y} \frac{M_n y}{I} dA = \frac{M_n}{I} \int_{A_y} y dA;$$

$$N_2 = \int_{A_y} \sigma_2 dA = \int_{A_y} \frac{(M_n + dM_n) y}{I} dA = \frac{M_n + dM_n}{I} \int_{A_y} y dA.$$

Предполагаем, что касательные напряжения в поперечном сечении прямоугольной балки параллельны поперечной силе Q и по ширине сечения распределены равномерно. Полагая, что в продольном сечении касательные напряжения τ также распределены равномерно, определим касательную силу dF , действующую на грани ac :

$$dF = \tau b dz.$$

Составим уравнение равновесия параллелепипеда $amnc$:

$$\sum Z = 0; N_1 + dF - N_2 = 0,$$

откуда

$$dF = N_2 - N_1$$

или

$$\tau b dz = \frac{M_n + dM_n}{I} \int_{A_y} y dA - \frac{M_n}{I} \int_{A_y} y dA,$$

$\int_{A_y} y dA$ обозначим через S , это статический момент заштрихованной

площади A_y сечения относительно нейтральной оси; тогда

$$\tau b dz = (S/I)(M_n + dM_n - M_n) = (S/I)dM_n,$$

откуда

$$\tau = \frac{dM_n}{dz} \frac{S}{Id}.$$

Так как согласно теореме Журавского $\frac{dM_n}{dz} = Q$, то $\tau = QS/(Id)$.

Это равенство называется формулой Журавского.

Выведенная формула дает значение касательных напряжений в продольных сечениях, но по закону парности в точках поперечного сечения, лежащих на линии пересечения продольной и поперечной плоскостей, будут действовать одинаковые по модулю касательные напряжения.

Формула Журавского читается так: касательные напряжения в поперечном сечении балки равны произведению поперечной силы Q на статический момент S относительно нейтральной оси части сечения, лежащей выше рассматриваемого слоя волокон, деленному на момент инерции I всего сечения относительно нейтральной оси и на ширину b рассматриваемого слоя волокон.

Определим закон распределения касательных напряжений для балки прямоугольного сечения (рис. 23.20). Для слоя волокон ad :

$$S_{adce} = b(h/2 - y) \left(\frac{h/2 - y}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$\tau = \frac{QS}{Ib} = \frac{Q(b/2)(h^2/4 - y^2)}{b \cdot bh^3/12} = \frac{6Q(h^2/4 - y^2)}{bh^3};$$

$$\text{при } y = \pm h/2 \quad \tau = 0;$$

$$\text{при } y = 0 \quad \tau = \tau_{\max} = 3Q/(2bh) = 3Q/(2A) = 3\tau_{\text{сред}}/2.$$

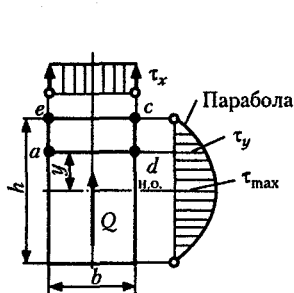


Рис. 23.20

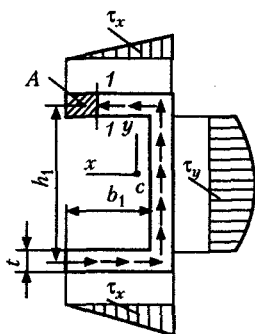


Рис. 23.21

Таким образом, в верхнем и нижнем слоях волокон касательные напряжения *равны нулю*, а в волокнах нейтрального слоя они достигают *максимального значения*. Законы распределения касательных напряжений по ширине и высоте прямоугольного сечения показаны на рис. 23.20.

С некоторым приближением формулу Журавского можно применять для определения касательных напряжений в балках с поперечными сечениями другой формы. Рассмотрим консольную балку корытного профиля, сечение которой показано на рис. 23.21, изгибаемую силой F на конце.

Плоскостью 1—1 отсечем часть полки площадью A . Так как изгиб балки поперечный, то в плоскости 1—1 будут действовать продольные касательные силы и напряжения τ_z (см. рис. 23.19). По закону парности в поперечном сечении полки возникнут касательные напряжения τ_x той же величины, и их можно определить по формуле Журавского:

$$\tau_x = QS_x / (It),$$

где Q — поперечная сила в сечении балки; S_x — статический момент отсеченной площади A относительно оси x (нейтральная ось), $S_x = Ah_1/2$; I — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси; t — толщина полки.

Если полка постоянной толщины, то касательные напряжения τ_x изменяются по линейному закону, тогда

$$\tau_{x \max} = Qb_1th_1 / (2It) = Qb_1h_1 / (2I).$$

Равнодействующая R_1 касательных напряжений в верхней полке равна:

$$R_1 = \tau_{x \text{ сред}} b_1 t = \tau_{x \max} b_1 t / 2 = Qb_1^2 h_1 t / (4I).$$

На нижнюю полку действует такая же сила R_1 , но направленная в противоположную сторону. Две силы R_1 образуют пару с моментом

$$M_k = R_1 h_1.$$

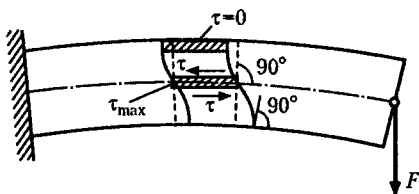


Рис. 23.22

Следовательно, в сечении наряду с вертикальной поперечной силой $Q = R_2$ возникает также крутящий момент M_k , который скручивает балку; R_2 — равнодействующая касательных напряжений в стенке балки.

Чтобы деформации кручения не было, внешнюю силу F следует приложить в какой-то точке B на расстоянии a от середины стенки и соблюсти условие $Fa = M_k$, откуда

$$a = M_k / F.$$

Такая точка B называется центром изгиба. Если сечение балки имеет двохоси симметрии, то центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Без вывода приведем формулу для определения максимальных касательных напряжений у балки *круглого сечения*:

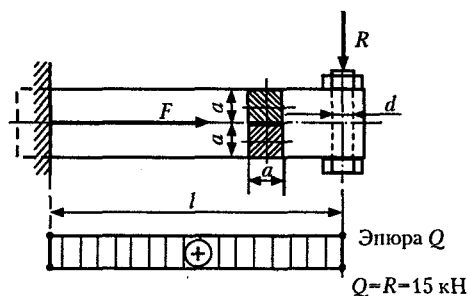
$$\tau_{\max} = 4Q / (3A) = 4\tau_{\text{сред}} / 3.$$

Касательные напряжения в балках соответствуют деформации сдвига, в результате чего плоские поперечные сечения при поперечном изгибе не остаются плоскими, как при чистом изгибе, а *искривляются* (рис. 23.22).

Большинство балок рассчитывают только по нормальным напряжениям; три вида балок следует *проверять по касательным напряжениям*, а именно: *деревянные балки*, так как древесина плохо работает на скалывание; *узкие балки* (например, двутавровые), так как максимальные касательные напряжения обратно пропорциональны ширине нейтрального слоя; *короткие балки*, так как при относительно небольших изгибающем моменте и нормальных напряжениях у таких балок могут возникать значительные поперечные силы и касательные напряжения.

Максимальное касательное напряжение в двутавровом сечении определяется по формуле Журавского. В таблицах сортамента приведены значения статического момента площади полусечения для двутавров и швеллеров.

Пример 23.7. Консольная балка, жестко зашпеленная одним концом в заделке, состоит из двух деревянных брусев квадратного сечения, соединенных на другом конце болтом (рис. 23.23). К свободному концу балки приложена сила $R = 15$ кН. Длина балки $l = 2$ м. Определить диаметр



стержня болта, если допускаемое напряжение среза $[\tau_{cp}] = 80$ МПа. Размер сечения брусьев $a = 20$ см.

Решение. Во всех поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента возникает поперечная сила $Q = R = 15$ кН и соответствующие ей касательные напряжения сдвига, определяемые по формуле Журавского, причем максимальные напряжения τ_{max} возникают на нейтральной оси, т.е. в месте соприкосновения брусьев.

По закону парности такие же касательные напряжения возникают и в продольных сечениях балки. Тогда

$$\tau_{max} = \frac{QS}{Ib},$$

где Q — поперечная сила, $Q = 15 \cdot 10^3$ Н; S — статический момент площади полусечения балки относительно нейтральной оси, $S = a^2 \cdot a/2 = a^3/2$; I — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси; $I = a(2a)^3/12 = 2a^4/3$; b — ширина сечения, $b = a$.

Подставив эти выражения в формулу Журавского, получим:

$$\tau_{max} = 3Q/(4a^2).$$

Подставляя числовые значения и учитывая размерности, найдем

$$\tau_{max} = 3 \cdot 15000 / (4 \cdot 0,2 \cdot 0,2) = 0,282 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Сила сдвига $F = \tau_{max} A_{cd}$, где A_{cd} — площадь сдвига, $A_{cd} = al$.

Вычислим F :

$$F = \tau_{max} al = 0,282 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 2 = 113 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Сила F , действующая на стыке балок, стремится срезать болт. Найдем необходимый диаметр d стержня болта из расчета его на срез:

$$F/A_{cp} \leq [\tau_{cp}],$$

где A_{cp} — площадь среза, равная площади поперечного сечения стержня болта, $A_{cp} = \pi d^2/4$.

Подставляя это выражение в расчетную формулу, получим

$$d \geq \sqrt{4F/(\pi[\tau_{cp}])}.$$

Подставим числовые значения:

$$d \geq \sqrt{4 \cdot 113 \cdot 10^3 / (314 \cdot 80 \cdot 10^6)} = 42 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 42 \text{ мм.}$$

23.8. Упругая линия балки

Изогнутая под действием нагрузок ось балки представляет собой плавную кривую, которая называется упругой линией. Деформация балки при изгибе характеризуется прогибом y и углом поворота поперечного сечения, который равен углу α наклона касательной к упругой линии по отношению к оси z балки. Уравнения прогибов и углов поворота сечений в общем виде записываются так:

$$y = f_1(z); \quad \alpha = f_2(z).$$

Из математики известно, что радиус кривизны кривой $y = f_1(z)$ в любой точке определяется по формуле

$$\rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / y'', \text{ где } y' = \frac{dy}{dz} = \text{tg } \alpha; \quad y'' = \frac{d^2 y}{dz^2}.$$

Ввиду малости деформаций $(y')^2$ пренебрегаем (так как эта величина значительно меньше единицы), тогда

$$\rho \approx 1/y''.$$

Ранее мы вывели формулу $\frac{EI}{\rho} = M_n$; подставляя в нее приближенное значение радиуса кривизны, получим дифференциальное уравнение упругой линии балки:

$$EIy'' = M_n.$$

Чтобы получить уравнение углов поворота сечений $\alpha = f_2(z)$, надо это уравнение проинтегрировать один раз, причем ввиду малости деформаций будем считать, что

$$y' = \text{tg } \alpha \approx \alpha, \text{ рад.}$$

Для получения уравнения прогибов $y = f_1(z)$ надо дифференциальное уравнение проинтегрировать дважды.

Рассмотрим балку постоянного сечения, нагруженную моментом m , сосредоточенной силой F и равномерно распределенной нагрузкой q , дающими положительные изгибающие моменты (рис. 23.24).

Начало координат возьмем на левом конце балки, ось y направим вверх, а ось z — вправо. Рассматриваемая балка имеет пять участков, каждому из которых соответствует свое уравнение момен-

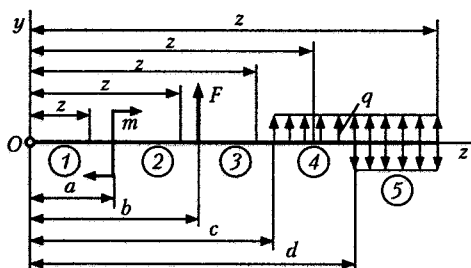


Рис. 23.24

тов, уравнение прогибов и уравнение углов поворота сечений. Обратим внимание на то, что упругая линия балки есть *плавная кривая*, следовательно, на границах участков значения углов поворота сечения и прогибов, определенных из уравнений соседних участков, будут совпадать. Интегрирование дифференциальных уравнений будем производить, *не раскрывая скобок* в уравнениях моментов, что сказывается лишь на значениях произвольных постоянных.

1-й участок:

$$EIy'' = 0; \quad EIy' = C_1; \quad EIy = C_1z + D_1;$$

2-й участок:

$$EIy'' = m = m(z-a)^0; \quad EIy' = m(z-a) + C_2;$$

$$EIy = m \frac{(z-a)^2}{2} + C_2z + D_2.$$

Подставив в уравнения первого и второго участков значение $z = a$, получим

$$C_1 = C_2; \quad D_1 = D_2;$$

3-й участок:

$$EIy'' = m(z-a)^0 + F(z-b); \quad EIy' = m(z-a) + F \frac{(z-b)^2}{2} + C_3;$$

$$EIy = m \frac{(z-a)^2}{2} + F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3} + C_3z + D_3;$$

4-й участок:

$$EIy'' = m(z-a)^0 + F(z-b) + q \frac{(z-c)^2}{2};$$

$$EIy' = m(z-a) + F \frac{(z-b)^2}{2} + q \frac{(z-c)^3}{2 \cdot 3} + C_4;$$

$$EIy = m \frac{(z-a)^2}{2} + F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3} + q \frac{(z-c)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + C_4 z + D_4.$$

Так как на границах смежных участков справедливы уравнения и предыдущего, и последующего участков, то

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C; \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D.$$

Обозначим α_0 — угол поворота сечения в начале координат (в радианах), а y_0 — прогиб в начале координат.

При $z = 0$ получим

$$EI\alpha_0 = C; \quad EIy_0 = D.$$

Так как каждой отдельной нагрузке в уравнениях соответствует отдельное слагаемое, то в общем виде можно записать следующие уравнения:

обобщенное уравнение углов поворота сечений

$$EI\alpha = EI\alpha_0 + \sum m(z-a) + \sum F \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{2 \cdot 3};$$

обобщенное уравнение прогибов

$$EIy = EIy_0 + EI\alpha_0 z + \sum m \frac{(z-a)^2}{2} + \sum F \frac{(z-b)^3}{2 \cdot 3} + \sum q \frac{(z-c)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Если равномерно распределенная нагрузка заканчивается не в конце балки, то эту нагрузку следует *мысленно продолжить* до конца и добавить противоположно направленную нагрузку такой же интенсивности (см. рис. 23.24, участок 5). При этом в обобщенные уравнения углов поворота и прогибов добавится еще по одному слагаемому с отрицательным знаком, соответственно:

$$-\sum q \frac{(z-d)^3}{2 \cdot 3} \text{ и } -\sum q \frac{(z-d)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Знаки слагаемых в обобщенных уравнениях устанавливают по правилу знаков для изгибающих моментов.

Положительное значение y означает прогиб вверх, и наоборот; положительное значение α означает поворот сечения против часовой стрелки, и наоборот.

При пользовании обобщенными уравнениями следует помнить:

1) для балки, жестко заделанной левым концом,

$$\alpha_0 = 0; \quad y_0 = 0;$$

2) для балки, левый конец которой лежит на опоре,

$$\alpha_0 \neq 0; \quad y_0 = 0;$$

для определения α_0 следует составить уравнение прогибов для второй опоры и приравнять его нулю;

3) в сечении с максимальным прогибом угол поворота сечения $\alpha = 0$, так как в этой точке упругой линии касательная параллельна оси z .

Помимо расчетов на прочность балки нередко проверяют или рассчитывают *на жесткость*. Условие жесткости заключается в том, что максимальный прогиб (стрела прогиба f) или максимальный угол поворота не должны превышать допускаемых величин. Расчетные уравнения на жесткость имеют следующий вид:

$$y_{\max} = f \leq [f]; \quad \alpha_{\max} \leq [\alpha].$$

Допускаемую величину прогиба обычно задают в долях длины пролета l , например для мостов $[f] = (1/700 \dots 1/10000)l$. Допускаемый угол поворота сечения задают в долях радиана.

Пример 23.8. Определить прогиб y_B свободного конца консольной балки AB , изгибаемой сосредоточенной силой F (рис. 23.25).

Решение. Реакция R_A и момент защемления m_A соответственно равны:

$$R_A = F; \quad m_A = Fl.$$

Учитывая, что $y_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$, из обобщенного уравнения прогибов найдем

$$EI y_B = R_A l^3 / 6 - m_A l^2 / 2.$$

Подставив значения R_A и m_A , получим

$$y_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{Fl^3}{6} - \frac{Fl^3}{2} \right) = -\frac{Fl^3}{3EI}.$$

Пример 23.9. Определить максимальный прогиб и углы поворота сечений на опорах балки, показанной на рис. 23.26.

Решение. В силу симметрии балки реакции опор равны

$$R_A = R_B = ql / 2.$$

Поместим начало координат на левой опоре, тогда $y_0 = 0$.

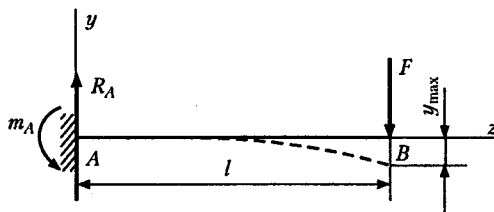
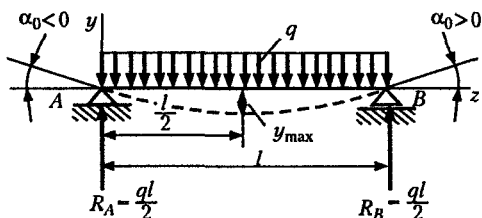


Рис. 23.25

Рис. 23.26



Для определения α_0 используем условие, что при $z = l$ $y_B = 0$.

$$EI y_B = EI \alpha_0 l + \frac{ql}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{q(l-0)^4}{24} = 0,$$

откуда $\alpha_0 = -ql^3 / (24EI)$. Очевидно, что $\alpha_B = -\alpha_0$.

Наибольшие углы поворота имеют опорные сечения.

Максимальный прогиб находится посередине пролета балки, т.е. при $z = l/2$. Тогда

$$EI y_{\max} = -\frac{ql^3}{24} \frac{l}{2} + \frac{ql}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{q\left(\frac{l}{2}-0\right)^4}{24} = -\frac{5ql^4}{384}.$$

Следовательно,

$$y_{\max} = -5ql^4 / (384EI).$$

Пример 23.10. Определить максимальный прогиб и угол поворота на опорах балки, нагруженной посередине пролета сосредоточенной силой (рис. 23.27).

Решение. Реакции равны $F/2$ каждая и направлены снизу вверх.

Помещаем начало координат на левой опоре, тогда $y_0 = 0$.

Для определения α_0 используем условие, что при $z = l$ прогиб равен нулю ($y_B = 0$):

$$EI y_B = EI \alpha_0 l + \frac{F}{2} \frac{(l-0)^3}{6} - \frac{F(l-l/2)}{6} = 0,$$

откуда

$$EI \alpha_0 = -F l^2 / 16.$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = \alpha_A = \alpha_{\max} = -F l^2 / (16EI).$$

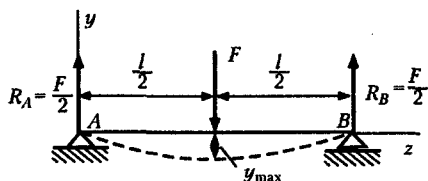


Рис. 23.27

Ввиду симметрии угол поворота на правой опоре

$$\alpha_B = -\alpha_A = Fl^2 / (16EI).$$

Максимальный прогиб будет при $z = l/2$, тогда

$$EI\alpha_0 z = -\frac{Fl^2}{16} \frac{l}{2},$$

следовательно,

$$EIy_{\max} = -\frac{Fl^2}{16} \frac{l}{2} + \frac{F}{2} \frac{(l-l/2)^3}{6} = -\frac{Fl^3}{48},$$

откуда

$$y_{\max} = -Fl^3 / (48EI).$$

Балки равного сопротивления изгибу. При изгибе балок постоянного сечения (за исключением случая чистого изгиба) все сечения, кроме опасного, имеют излишний запас прочности, что свидетельствует о нерациональном использовании материала. Наиболее рациональной будет такая форма балки, при которой *напряжения во всех поперечных сечениях будут равны допускаемому*. Такие балки называются балками равного сопротивления изгибу.

Рассмотрим произвольное сечение балки равного сопротивления изгибу. Обозначим действующий в этом сечении изгибающий момент M'_n , а момент сопротивления — W' . Тогда должно выполняться условие

$$M'_n / W' = M_{n\max} / W = [\sigma] = \text{const.}$$

Отсюда следует, что в балках равного сопротивления изгибу моменты сопротивления сечений должны быть прямо пропорциональны изгибающим моментам:

$$M'_n / M_{n\max} = W' / W.$$

Изготовление балок равного сопротивления сложно в технологическом отношении, поэтому применение их ограничено.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий теорию балок равного сопротивления изгибу.

Пусть балка AB *прямоугольного сечения* жестко закреплена одним концом, а к другому ее концу приложена сосредоточенная сила F , как показано на рис. 23.28, *а*. При условии равного сопротивления изгибу по всей длине установим:

- 1) как должна меняться высота h балки при постоянной ширине b ;
- 2) как должна меняться ширина балки при постоянной высоте.

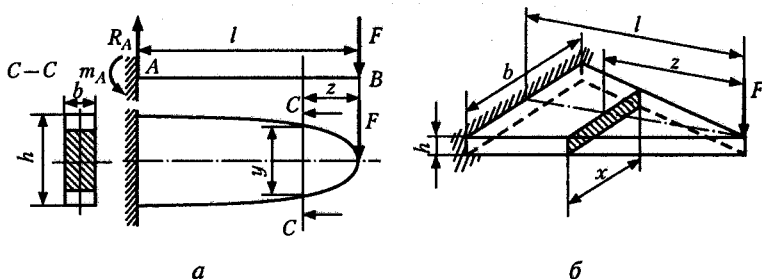


Рис. 23.28

1. *Ширина балки постоянна.* Изгибающий момент в произвольном сечении, отстоящем на расстоянии z от свободного конца,

$$M'_и = -Fz.$$

Соответствующий момент сопротивления

$$W' = by^2/6.$$

Здесь $b = \text{const}$, а y — меняется.

Максимальный изгибающий момент будет в защемлении:

$$M_{и \max} = -Fl.$$

Момент сопротивления изгибу в защемлении

$$W = bh^2/6.$$

Запишем условие пропорциональности изгибающих моментов и моментов сопротивления изгибу:

$$\frac{-Fz}{-Fl} = \frac{by^2/6}{bh^2/6}, \text{ откуда } y^2 = h^2 z / l.$$

Это уравнение параболы. Заметим, что объем такой балки равного сопротивления изгибу будет составлять $2/3$ объема балки постоянного сечения $b \times h$, что дает экономию материала в 33% (рис. 23.28, б).

2. *Высота балки постоянна.* Обозначим переменную ширину x , ширину балки в защемлении b , высоту балки h . Как и в предыдущем случае, запишем

$$\frac{-Fz}{-Fl} = \frac{xh^2/6}{bh^2/6}, \text{ откуда } x = bz / l.$$

Из этого соотношения видно, что ширина балки изменяется по линейному закону. Подобная балка изображена на рис. 23.28, б. По

сравнению с призматической балкой постоянного сечения экономия материала достигает 50 %.

Сравним прогибы балок постоянного сечения и равного сопротивления изгибу при одинаковой прочности и прочих равных условиях.

Формула для определения прогиба свободного конца балки равного сопротивления изгибу (без вывода)

$$y'_{\max} = -Fl^3 / (2EI).$$

Сравнивая это выражение с формулой для определения прогиба свободного конца балки постоянного сечения

$$y_{\max} = -Fl^3 / (3EI),$$

приходим к выводу, что наибольший прогиб балки равного сопротивления изгибу в 1,5 раза превосходит прогиб балки постоянного сечения.

Свойство балок равного сопротивления изгибу (с постоянной высотой) деформироваться значительно больше балок постоянного сечения (при тех же нагрузках и допускаемых напряжениях) используется в случаях, когда необходимо смягчить действие нагрузки, изменяющейся с течением времени, или ударной нагрузки. В частности, листовые рессоры, широко применяющиеся на транспорте (вагоны, автомашины), представляют собой разрезанные на полосы и сложенные стопкой балки равного сопротивления изгибу.

23.9. Косой изгиб

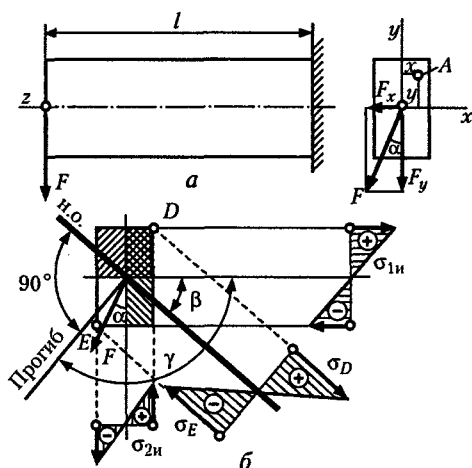
Ранее мы рассматривали прямой изгиб балок, при котором все нагрузки действовали в одной плоскости, проходящей через одну из главных осей сечения. При таком изгибе деформация оси балки происходит в плоскости действия нагрузок.

Изгиб, при котором плоскость действия нагрузок не совпадает ни с одной из главных осей сечения, называется **к о с ы м**.

Рассмотрим консольную балку длиной l прямоугольного сечения, к концу которой приложена сила F , составляющая с осью y угол α (рис. 23.29, *а*). Разложим силу F на две составляющие, направленные по главным осям сечения, и, пользуясь принципом независимости действия сил, сведем косой изгиб к прямым изгибам в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Очевидно, что опасное сечение будет находиться в заделке и максимальные изгибающие моменты таковы:

$$M_{\text{нх}} = Fl \cos \alpha; \quad M_{\text{ны}} = Fl \sin \alpha.$$

Рис. 23.29



Соответствующие этим изгибающим моментам нормальные напряжения в какой-то точке A опасного сечения вычисляют по формулам

$$\sigma_{1A} = M_{ix}y / I_x, \quad \sigma_{2A} = M_{iy}x / I_y,$$

где x, y — текущие координаты точки A ; I_x, I_y — моменты инерции относительно нейтральных осей.

Суммарное нормальное напряжение в точке A

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = \frac{M_{ix}y}{I_x} + \frac{M_{iy}x}{I_y} = Fl \left(\frac{y \cos \alpha}{I_x} + \frac{x \sin \alpha}{I_y} \right).$$

Если заштриховать в разные стороны части сечения, где будут действовать только напряжения растяжения $\sigma_{1н}$ и $\sigma_{2н}$, то увидим, что в зоне, заштрихованной в клетку, будут действовать суммарные напряжения растяжения, а в незаштрихованной — суммарные напряжения сжатия (рис. 23.29, б). Очевидно, что максимальное напряжение растяжения возникает в точке D , а максимальное напряжение сжатия — в точке E опасного сечения. Эпюры нормальных напряжений показаны на том же рисунке.

Так как на нейтральной оси $\sigma_A = 0$, то ее уравнение имеет вид

$$y \cos \alpha / I_x + x \sin \alpha / I_y = 0,$$

где x, y — текущие координаты точек нейтральной оси.

Из уравнения видно, что нейтральная ось есть прямая линия, проходящая через начало координат, т.е. через центр тяжести сече-

ния балки. Определим угол β , который нейтральная ось составляет с осью x :

$$\operatorname{tg} \beta = y/x = -I_x \sin \alpha / (I_y \cos \alpha) = -(I_x / I_y) \operatorname{tg} \alpha.$$

Из этого равенства видно, что если $I_x \neq I_y$, то $\beta \neq \alpha$ и нейтральная ось не перпендикулярна линии действия силы F .

Пользуясь принципом независимости действия сил, определим направление прогиба балки под действием силы F . Прогиб f_x в направлении оси x равен

$$f_x = -F(\sin \alpha) l^3 / (3EI_y).$$

Прогиб f_y в направлении оси y

$$f_y = -F(\cos \alpha) l^3 / (3EI_x).$$

Суммарный прогиб f определится по формуле

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}.$$

Обозначив γ угол между направлением суммарного прогиба и осью x , получим

$$\operatorname{ctg} \gamma = f_x / f_y = [-F(\sin \alpha) l^3 / (3EI_y)] / [-F(\cos \alpha) l^3 / (3EI_x)]$$

$$\text{или } \operatorname{ctg} \gamma = (I_x / I_y) \operatorname{tg} \alpha.$$

Сравнивая это выражение с формулой для определения $\operatorname{tg} \beta$, видим, что $\operatorname{ctg} \gamma$ и $\operatorname{tg} \beta$ отличаются только знаком, следовательно, сами углы разнятся на 90° и суммарный прогиб балки происходит в плоскости, перпендикулярной нейтральной оси. Отсюда вытекает, что *при косом изгибе плоскость прогиба не совпадает с плоскостью действия нагрузок.*

Глава 24

СОЧЕТАНИЕ ОСНОВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

24.1. Изгиб и растяжение или сжатие

Рассмотрим брус длиной l постоянного поперечного сечения площадью A , зашпеленный одним концом и нагруженный на свободном конце произвольно направленной силой F , приложенной в центре тяжести сечения (рис. 24.1).

Разложим силу F на составляющие F_x , F_y и F_z . В результате действия этих составляющих получаем сочетание деформаций растяжения и поперечного изгиба в двух взаимно-перпендикулярных

плоскостях, причем касательными напряжениями изгиба будем в дальнейшем пренебрегать.

Применим принцип независимости действия сил и определим максимальные нормальные напряжения в опасном сечении (заделке):

$$\sigma_p = F_z / A; \quad \sigma_{1и} = \pm F_y l / W_x; \\ \sigma_{2и} = \pm F_x l / W_y.$$

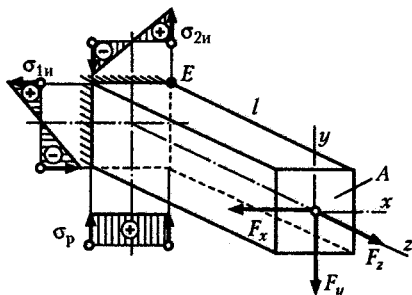


Рис. 24.1

Максимальные суммарные напряжения возникнут в точке E и будут напряжениями растяжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma_E = F_z / A + F_y l / W_x + F_x l / W_y.$$

Эпюры нормальных напряжений растяжения и изгиба представлены на рис. 24.1.

Деформации растяжения и изгиба сочетаются, например, у крюков, винтов с отогнутой головкой, винтов слесарных тисков и т.д.

Пример 24.1. На рис. 24.2 изображен стальной крюк, изготовленный из круглого прутка диаметром $d = 24$ мм. Эксцентриситет крюка $e = 55$ мм, сила тяжести поднимаемого груза $F = 3$ кН. Определить напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях 1–1 и 2–2 крюка.

Решение. Применив метод сечений, видим, что в сечении 1–1 действует один силовой фактор — продольная сила $N = F$, а в сечении 2–2 — два внутренних силовых фактора: продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_n = Fe$.

Вычислим напряжения σ_1 и σ_2 в сечениях 1–1 и 2–2:

$$\sigma_1 = N / A = 4F / (\pi d^2) = \\ = 4 \cdot 3 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 24^2 \cdot 10^{-6}) = 6,7 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

В сечении 2–2 имеем сочетание изгиба и растяжения.

Вычислим максимальное суммарное напряжение:

$$\sigma_2 = \sigma_{\max} = N / A + M / W = \sigma_1 + Fe / W.$$

Учитывая, что $e = 55$ мм, а $W \approx 0,1d^3$, получим

$$\sigma_2 = 6,7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 \cdot 55 \cdot 10^{-3} / (0,1 \cdot 24^3 \cdot 10^{-9}) = 126 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Вид деформации, когда сжимающая сила параллельна оси бруса, но точка ее приложения не совпадает с центром тяжести сечения называется в н е -

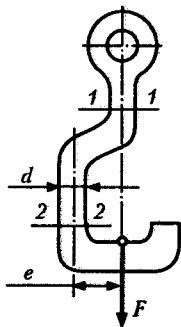


Рис. 24.2

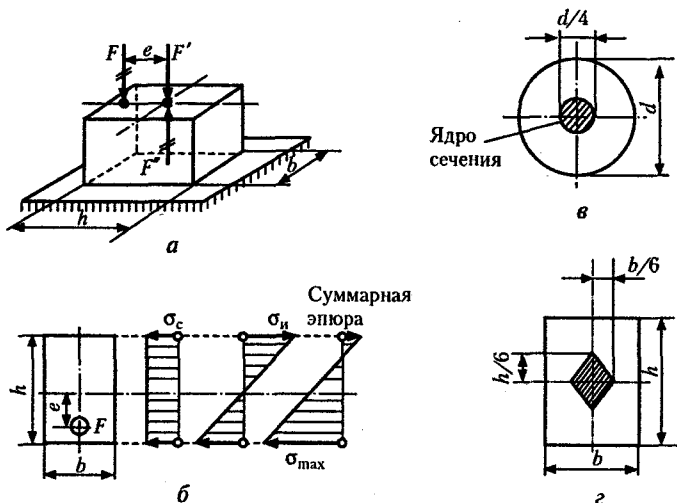


Рис. 24.3

центренным сжатием (ранее изученную нами деформацию можно назвать центральным сжатием).

Рассмотрим брус прямоугольного сечения площадью $A = bh$ (рис. 24.3, а), к которому на расстоянии e от оси приложена параллельная ей сила F .

В центре тяжести сечения вдоль оси приложим две противоположно направленные силы, равные по модулю силе F . Полученную систему трех сил будем рассматривать как силу F , приложенную в центре тяжести, и пару сил с моментом $m = Fe$. Подъезуясь принципом независимости действия сил, внецентренное сжатие будем рассматривать как сочетание центрального сжатия и чистого изгиба, причем соответствующие нормальные напряжения будем определять по формулам

$$\sigma_c = -F/A; \quad \sigma_n = \pm M_n/W,$$

а суммарные напряжения — по формуле

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_n = -F/A \pm M_n/W.$$

Максимальные суммарные напряжения будут напряжениями сжатия:

$$\sigma_{\max} = -F/A - Fe/W.$$

Эпюры нормальных напряжений сжатия, изгиба и суммарная эпюра представлены на рис 24.3, б.

Чтобы в брусе не возникали напряжения растяжения (недопустимые, например, в кирпичной или каменной кладке), должно выполняться неравенство

$$\sigma_c \geq \sigma_n \text{ или } F/A \geq Fe/W, \text{ откуда } e \leq W/A.$$

Для бруса прямоугольного сечения предельное значение эксцентриситета

$$e = \frac{W}{A} = \frac{bh^2}{6} : bh = \frac{h}{6}.$$

Для бруса круглого сечения диаметром d предельное значение эксцентриситета будет равно

$$e = W/A = \frac{\pi d^3/32}{\pi d^2/4} = d/8.$$

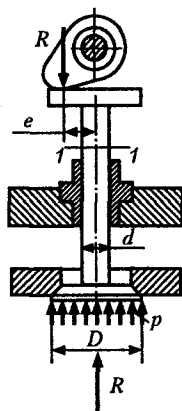


Рис. 24.4

Ввиду полярной симметрии круга геометрическое место предельных положений точек приложения сжимающей силы F будет представлять собой окружность диаметром $d/4$. Круг, расположенный внутри этой окружности, называется ядром сечения (рис. 24.3, в).

Для прямоугольного бруса сечением $b \times h$ ядро сечения представляет собой ромб с диагоналями $h/3$ и $b/3$ (рис. 24.3, г).

В случае внецентренного растяжения расчеты производятся по таким же формулам с учетом знаков напряжений.

Пример 24.2. На рис. 24.4 изображен клапанный механизм в момент открытия клапана. Определить максимальные напряжения в сечении 1—1 стержня тарелки клапана. Дано: давление на клапан $p = 2$ МПа, диаметр клапана $D = 40$ мм, диаметр стержня тарелки $d = 12$ мм, максимальный эксцентриситет $e = 14$ мм.

Решение. Стержень тарелки клапанного механизма испытывает деформацию внецентренного сжатия, т. е. сочетания сжатия и изгиба. Максимальное напряжение сжатия определяется по формуле

$$\sigma_{\max} = -R/A - Re/W.$$

В нашем примере R — сила давления на дно тарелки клапанного механизма:

$$R = p\pi D^2/4 = 2 \cdot 10^6 \pi \cdot 40^2 \cdot 10^{-6}/4 = 800\pi \text{ Н.}$$

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = \pi d^2/4 = \pi \cdot 12^2 \cdot 10^{-6}/4 = 36\pi \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

Момент сопротивления изгибу

$$W \approx 0,1d^3 = 0,1 \cdot 12^3 \cdot 10^{-9} = 1728 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

Подставляя числовые значения и произведя вычисления, находим

$$\sigma_{\max} = -\frac{800\pi}{36\pi \cdot 10^{-6}} - \frac{800\pi \cdot 14 \cdot 10^{-3}}{1728 \cdot 10^{-9}} = -230 \cdot 10^6 \text{ Па} = -230 \text{ МПа}.$$

24.2. Гипотезы прочности

До сих пор мы рассматривали случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения, которые в каждой точке можно было складывать алгебраически.

Часто встречаются и имеют большое практическое значение случаи сочетания основных деформаций, когда в поперечных сечениях возникают и нормальные, и касательные напряжения, распределенные неравномерно и по разным законам. Для таких случаев опытное определение величин, характеризующих прочность, невозможно, поэтому при оценке прочности детали приходится основываться на механических характеристиках данного материала, полученных из диаграммы растяжения.

Как известно, при растяжении прочность пластичных материалов характеризуется пределом текучести, а хрупких — пределом прочности; эти напряжения считаются предельными, в зависимости от них вычисляют допускаемые напряжения.

Гипотезы прочности — это научные предположения об основной причине достижения материалом предельного напряженного состояния при сочетании основных деформаций.

Напряженные состояния при сочетании основных деформаций и одноосном растяжении будем называть равноопасными, или эквивалентными, если их главные напряжения отличаются от предельного для данного материала в одинаковое число раз, иначе говоря, коэффициенты запаса прочности для эквивалентных напряженных состояний одинаковы.

Эквивалентным напряжением называется такое условное напряжение при одноосном растяжении, которое равноопасно заданному случаю сочетания основных деформаций.

На основании гипотез прочности выводят формулы для вычисления эквивалентного напряжения, которое затем сопоставляют с допускаемым напряжением на растяжение. Таким образом, условие прочности при сочетании основных деформаций, когда в поперечных сечениях действуют и нормальные, и касательные напряжения, будет иметь вид

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p].$$

Сформулируем и охарактеризуем гипотезы прочности и приведем соответствующие формулы для вычисления эквивалентных напряжений.

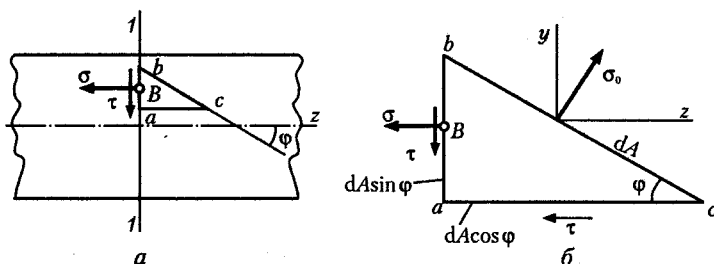


Рис. 24.5

Первая теория прочности, основанная на гипотезе наибольших нормальных напряжений, и вторая теория прочности, основанная на гипотезе наибольших линейных деформаций, в настоящее время не применяются, и мы их рассматривать не будем.

Перейдем к рассмотрению теорий прочности, которыми пользуются в настоящее время.

1. Гипотеза наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).

Согласно этой гипотезе, предложенной в конце XVIII в., *опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают предельной величины.*

В подразд. 20.5 мы установили, что при одноосном растяжении бруса максимальное касательное напряжение в наклонном сечении равно половине максимального нормального напряжения. Отсюда следует, что предельное касательное напряжение равно половине предельного нормального:

$$\tau_{\text{пред}} = \sigma_{\text{пред}} / 2.$$

В том же подразделе мы установили, что в случае плоского напряженного состояния максимальное касательное напряжение равно полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\text{max}} = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}) / 2.$$

Чтобы вывести формулу для вычисления эквивалентных напряжений по третьей теории, рассмотрим брус, у которого в поперечном сечении действуют нормальные σ и касательные τ напряжения (рис. 24.5, а).

Внутри бруса вблизи некоторой точки B вырежем бесконечно малую призму abc , у которой грань ab совпадает с поперечным, грань ac — с продольным сечениями, а грань bc является главной площадкой, на которой действует главное напряжение σ_0 . Согласно закону парности касательных напряжений в грани ac призмы также будут действовать касательные напряжения τ (рис. 24.5, б). Так как в продольном сечении бруса нормальных напряжений

нет, то здесь мы имеем дело со случаем плоского напряженного состояния, который называют у п р о щ е н н ы м.

Рассмотрим равновесие призмы abc , для чего спроецируем все действующие на нее силы на оси z и y . Площадь грани bc обозначим dA :

$$\sum Z = 0; \quad \sigma_0 dA \sin \varphi - \tau dA \cos \varphi - \sigma dA \sin \varphi = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad \sigma_0 dA \cos \varphi - \tau dA \sin \varphi = 0.$$

Разделив обе части равенств на dA , получим:

$$(\sigma_0 - \sigma) \sin \varphi = \tau \cos \varphi; \quad \sigma_0 \cos \varphi = \tau \sin \varphi.$$

Оба равенства разделим на $\cos \varphi$ и, исключив из них $\operatorname{tg} \varphi$, получим выражение

$$\tau / (\sigma_0 - \sigma) = \sigma_0 / \tau,$$

равнозначное квадратному уравнению

$$\sigma_0^2 - \sigma_0 \cdot \sigma - \tau^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$\sigma_0 = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Таким образом, главные напряжения в наклонных площадках в зонах точки A бруса определяют по формулам:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Следовательно, максимальные касательные напряжения будут (см. подразд. 20.5):

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Поскольку $\tau_{\text{пред}} = \sigma_{\text{пред}} / 2$, а эквивалентное напряжение не должно превышать предельного, то, применяя гипотезу наибольших касательных напряжений, имеем

$$\tau_{\max} = \tau_{\text{пред}} = \sigma_{\text{пред}} / 2 = \sigma_{\text{эkv}} / 2 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} / 2.$$

В результате получаем формулу для вычисления эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Гипотеза наибольших касательных напряжений хорошо подтверждается опытами, в особенности для пластичных материалов.

2. Гипотеза Мора (четвертая теория прочности).

К. О. Мор (1835—1918) — немецкий ученый в области сопротивления материалов и строительной механики, создатель одной из теорий прочности, графических методов определения напряжений при сложном напряженном состоянии (круг Мора) и т. д.

Гипотеза Мора предложена в начале XX в. Согласно этой гипотезе, *опасное состояние материала наступает тогда, когда на некоторой площадке осуществляется наиболее неблагоприятная комбинация нормального и касательного напряжений.*

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

где $k = [\sigma_p] / [\sigma_c]$.

Эта формула одинаково пригодна как для хрупких, так и для пластичных материалов, при $k = 1$ она тождественна формуле третьей теории прочности.

3. Энергетическая гипотеза (пятая, или энергетическая, теория прочности).

При деформации элементарной частицы тела в общем случае изменяются ее форма и ее объем. Таким образом, полная потенциальная энергия деформации состоит из двух частей: энергии формоизменения и энергии изменения объема. Энергетическая гипотеза прочности, предложенная в начале XX в., в качестве критерия перехода материала в предельное состояние принимает только энергию формоизменения.

Согласно этой гипотезе, *опасное состояние материала в данной точке наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия формоизменения для этой точки достигает предельной величины.*

Формула для вычисления эквивалентных напряжений имеет вид

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.$$

Эта формула для пластичных материалов хорошо подтверждается опытами и получила широкое распространение.

Отметим, что во всех приведенных выше формулах σ и τ — нормальные и касательные напряжения на площадке поперечного сечения, проходящего через опасную или предположительно опасную точку.

24.3. Изгиб и кручение

Сочетание деформаций изгиба и кручения испытывает большинство валов, которые обычно представляют собой прямые бруска круглого или кольцевого сечения.

При расчете валов мы будем учитывать только крутящий или изгибающий моменты, действующие в опасном поперечном сечении, и не будем принимать во внимание поперечные силы, так как соответствующие им касательные напряжения относительно невелики.

Максимальные нормальные и касательные напряжения у круглых валов вычисляют по формулам

$$\sigma = M_{\text{и}}/W, \quad \tau = M_{\text{к}}/W_{\text{р}},$$

причем для круглых валов $W_{\text{р}} = 2W$.

При сочетании изгиба и кручения опасными будут точки опасного поперечного сечения вала, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Применив третью теорию прочности, получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(M_{\text{и}}/W)^2 + 4(M_{\text{к}}/W_{\text{р}})^2} = \\ &= \sqrt{(M_{\text{и}}/W)^2 + 4[M_{\text{к}}/(2W)]^2} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}/W.\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в числителе, назовем эквивалентным моментом:

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2};$$

тогда расчетная формула для круглых валов примет вид

$$\sigma_{\text{экв}} = M_{\text{экв}}/W \leq [\sigma]$$

(валы обычно изготавливают из материала, у которого $[\sigma_{\text{р}}] = [\sigma_{\text{с}}] = [\sigma]$).

По этой формуле расчет круглых валов ведут, как на изгиб, но не по изгибающему, а по эквивалентному моменту. Применив энергетическую теорию прочности, получим

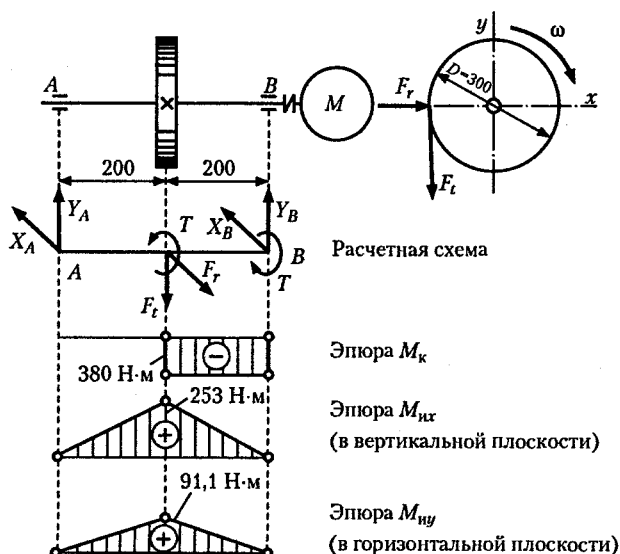
$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(M_{\text{и}}/W)^2 + 3[M_{\text{к}}/(2W)]^2} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}/W,$$

т.е. по энергетической теории прочности

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + 0,75M_{\text{к}}^2}.$$

Для расчетов деталей на сочетание деформаций поперечного изгиба и кручения необходимо, как правило, составить расчетную схему конструкции и построить эпюры изгибающих и крутящих моментов, определить предположительно опасные сечения, после чего, применив одну из теорий прочности, произвести необходимые расчеты.

Рис. 24.6



На рис. 24.6 в прямоугольных проекциях представлены ведущий вал цилиндрической прямозубой передачи, расчетная схема вала и эпюры крутящего и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Эпюры построены на основании следующих данных:

передаваемая мощность $P = 40$ кВт;

частота вращения вала $n = 1000$ об/мин;

диаметр делительной окружности зубчатого колеса $D = 300$ мм;

расстояние между опорами вала $l = 400$ мм;

радиальная нагрузка на зуб колеса $F_r = 0,36 F_t$, где F_t — окружная сила на колесе.

Проведем проверку прочности вала, изображенного на рис. 24.6, если дано:

диаметр вала в опасном сечении $d = 35$ мм;

допускаемое напряжение для вала $[\sigma_p] = 70$ МПа.

Прежде всего определим вращающий момент T :

$$T = P / \omega = 30P / (\pi n) = 30 \cdot 40 \cdot 10^3 / (314 \cdot 1000) = 380 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

Далее определим окружную силу F_t :

$$F_t = 2T / D = 2 \cdot 380 / 0,3 = 2530 \text{ Н}$$

Определяем радиальную силу F_r :

$$F_r = 0,36 F_t = 0,36 \cdot 2530 = 911 \text{ Н}$$

по этим данным строим эпюры M_k и $M_{из}$. Из эпюр видно, что опасное сечение расположено в месте закрепления зубчатого колеса.

Применим третью теорию прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2} / W; \text{ учитывая, что } M_{\text{и}}^2 = M_{\text{их}}^2 + M_{\text{иу}}^2, W \approx 0,1d^3.$$

Взяв значения моментов из эпюр на рис. 24.6, получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{253^2 + 91,1^2 + 380^2}}{0,1(35 \cdot 10^{-3})^3} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па} = 109 \text{ МПа} > [\sigma_{\text{р}}] = 70 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность вала недостаточна.

На рис. 24.7 в аксонометрической проекции представлены трансмиссионный вал ременной передачи, расчетная схема вала и эпюры крутящего и изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также данные для расчета.

РАСЧЕТ ВАЛА НА ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ

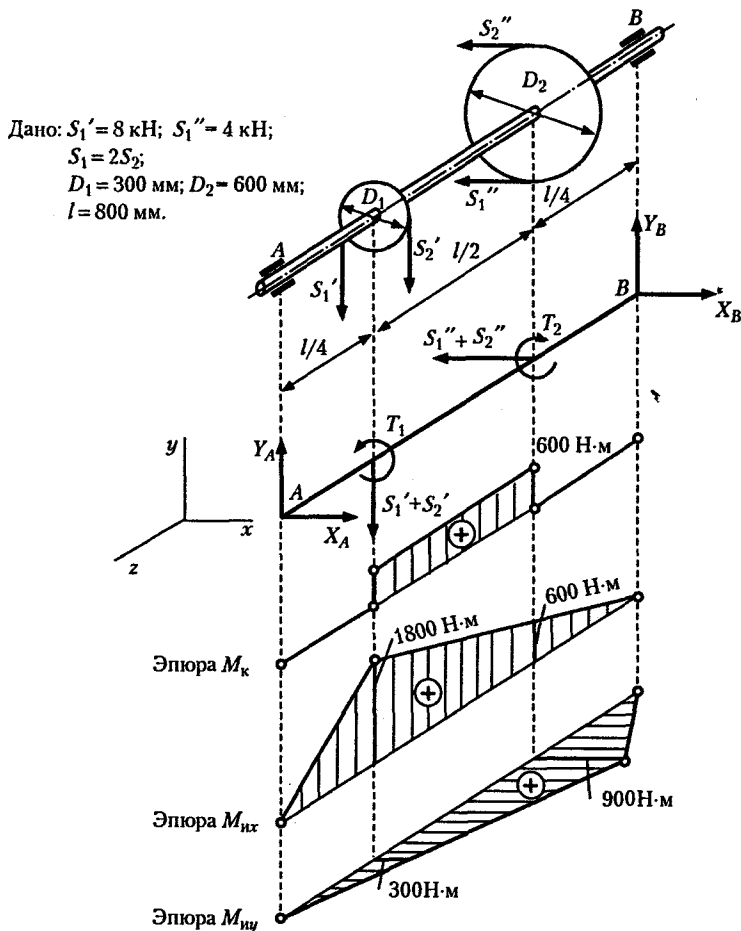


Рис. 24.7

24.4. Кручение и растяжение или сжатие

Сочетание деформаций кручения и растяжения испытывают, например, болты и крепежные винты, а сочетание деформаций кручения и сжатия — винты домкратов и винтовых прессов, сверла и шпиндели сверлильных станков. Эти детали обычно изготавливают из материалов, у которых $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$.

Нормальные и максимальные касательные напряжения в этих случаях определяют по формулам

$$\sigma = N / A; \quad \tau = M_k / W_p.$$

Применив третью теорию прочности, получим расчетную формулу

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(N/A)^2 + 4(M_k/W_p)^2} \leq [\sigma].$$

Применив энергетическую теорию прочности, получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(N/A)^2 + 3(M_k/W_p)^2} \leq [\sigma].$$

Глава 25

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

25.1. Сопротивление усталости материалов

Ранее было установлено, что динамические нагрузки подразделяются на повторно-переменные, ударные, внезапно приложенные и инерционные.

В этом подразделе рассматриваются *повторно-переменные нагрузки*, которые вызывают в деталях машин периодически изменяющиеся напряжения и деформации. Сопротивление деталей действию таких нагрузок существенно отличается от их сопротивления при статическом нагружении.

Повторно-переменным нагрузкам подвергаются, например, вращающиеся оси, валы, зубчатые колеса и т. п. При вращении вала одни и те же волокна оказываются то в растянутой, то в сжатой зоне, т. е. подвергаются деформациям растяжения—сжатия.

Анализ поломок деталей машин показывает, что материалы длительное время подвергавшиеся действию переменных нагрузок, могут разрушаться при напряжениях более низких, чем предел прочности и даже предел текучести. Разрушение при этом происходит вследствие усталости материала.

Дальнейшее изложение материала ведется в соответствии с ГОСТ 23207—78 «Сопротивление усталости. Основные термины,

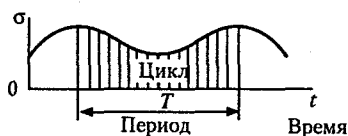


Рис. 25.1

определения и обозначения». Используем стандартное определение усталости.

Усталостью называется процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению

свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

Причины усталостного разрушения заключаются в появлении микротрещин из-за неоднородности строения материала, следов механической обработки и повреждений поверхности детали (волосовины, раковины, газовые и шлаковые включения, следы резца или шлифовального камня и т. п.), а также в результате концентрации напряжений, о чем будет идти речь в следующем подразделе.

Способность материалов противостоять усталости называется сопротивлением усталости. Изучение этого вопроса имеет очень большое значение, поскольку такие ответственные детали, как валы, поршневые пальцы, оси железнодорожных вагонов, и многие другие выходят из строя в результате усталости.

Введем основные стандартные понятия, необходимые в дальнейшем.

Циклом напряжений называется совокупность всех значений напряжений за период их изменения (рис. 25.1). Периодом цикла T называется продолжительность одного цикла.

Цикл напряжений (рис. 25.2) характеризуется следующими параметрами:

- 1) максимальное напряжение $\sigma_{\max}$;
- 2) минимальное напряжение $\sigma_{\min}$;
- 3) среднее напряжение $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$;
- 4) амплитуда цикла $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$;
- 5) коэффициент асимметрии цикла $R_\sigma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

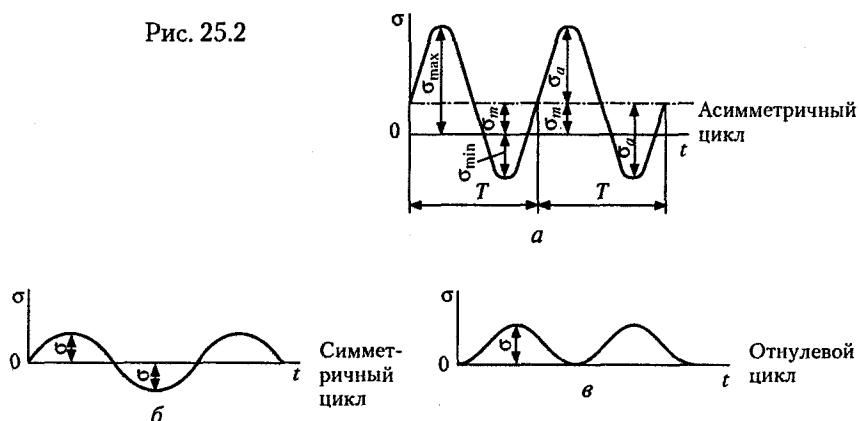
Циклы, имеющие одинаковый коэффициент асимметрии, называются подобными.

В случае равенства $\sigma_{\max}$ и $\sigma_{\min}$ по абсолютной величине имеем симметричный цикл напряжений (см. рис. 25.2, б), при котором $\sigma_m = 0$, $\sigma_a = \pm \sigma$, $R_\sigma = -1$.

Цикл напряжений, изображенный на рис. 25.2, а, является примером асимметричного знакопеременного цикла.

На рис. 25.2, в показан отнулевой цикл напряжений, для которого $R_\sigma = 0$, так как $\sigma_{\min} = 0$.

Рис. 25.2



В случае действия касательных напряжений необходимо в обозначениях и формулах заменить σ на τ .

Число циклов напряжений до начала усталостного разрушения называется циклической долговечностью и обозначается N .

Максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, при котором материал может сопротивляться усталости при заданной циклической долговечности, называется пределом выносливости.

Предел выносливости для нормальных напряжений при симметричном цикле обозначают σ_{-1} , при отнулевом цикле — σ_0 , при цикле с коэффициентом асимметрии R_σ — σ_R .

Для определения предела выносливости производят испытания образцов на усталость на специальных машинах. Наибольшее распространение имеют испытания на усталость при изгибе и симметричном цикле напряжений. Предварительно устанавливаемая наибольшая продолжительность испытаний называется базой испытаний, обычно задаваемая числом циклов, обозначаемым N_0 . Для стали $N_0 = 5$ млн циклов.

Для испытания на усталость изготавливают серию одинаковых тщательно отполированных образцов, имеющих в рабочей части цилиндрическую форму диаметром 5...10 мм. Образцы доводят до разрушения при различной нагрузке и напряжениях, устанавливая при этом циклическую долговечность образца. По полученным данным строят кривую усталости (рис. 25.3). На кривой усталости имеется участок, стремящийся к горизонтальной асимптоте. Ордината этой асимптоты и дает значение предела выносливости σ_R .

Опыт показывает, что стальной образец, выдержавший 5 млн циклов, может выдержать и неограниченное число циклов. Экспериментально установлено, что при любом асимметричном цикле предел выносливости для того же материала будет выше, чем при

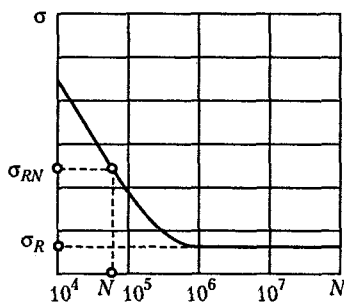


Рис. 25.3

симметричном цикле. Это означает, что *симметричный цикл является наиболее опасным*.

Для цветных металлов предел выносливости определяют при базе испытаний $N_0 = 10^7$ и более циклов.

Величина предела выносливости зависит от вида деформации. Испытания на усталость при растяжении—сжатии и кручении проводятся реже, поэтому пределы выносливости при растяжении σ_{-1p} и кручении τ_{-1}

определяют из эмпирических формул по известному пределу выносливости σ_{-1} при симметричном цикле изгиба:

$$\sigma_{-1p} \approx (0,7 \dots 0,9) \sigma_{-1}; \quad \tau_{-1} \approx 0,58 \sigma_{-1}.$$

Пределы выносливости для симметричного цикла изгиба могут быть вычислены с помощью характеристик статической прочности (например, временного сопротивления σ_B) по следующим эмпирическим соотношениям:

для углеродистой стали

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \sigma_B;$$

для легированной стали

$$\sigma_{-1} \approx 0,35 \sigma_B + 120 \text{ МПа};$$

для серого чугуна

$$\sigma_{-1} \approx 0,45 \sigma_B.$$

— При расчетах деталей, не предназначенных для длительной эксплуатации, вместо предела выносливости учитывается предел ограниченной выносливости σ_{RN} — максимальное по абсолютному значению напряжение цикла, соответствующее задаваемой циклической долговечности N (см. рис. 25.3).

25.2. Влияние факторов на предел выносливости

Предел выносливости конкретной детали конструкции зависит от ряда факторов, главные из которых — концентрация напряжений, масштабный фактор (размеры детали) и состояние поверхности детали (шероховатость и поверхностное упрочнение).

Влияние концентрации напряжений. Концентрацией напряжений называется повышение напряжений в местах изменений формы или нарушений сплошности материала. Напряжения, вычисленные по формулам сопротивления материалов без учета концентрации, называются номинальными напряжениями.

Резкое изменение формы или площади поперечного сечения деталей (наличие отверстий, выточек, галтелей, канавок, надрезов и т. п.) приводит к неравномерному распределению напряжений, т.е. вызывают *концентрацию напряжений*. Причина, вызывающая концентрацию напряжений (отверстие, выточка), называется *концентратором напряжений*.

Рассмотрим стальную полосу, растягиваемую силой F (рис. 25.4). В поперечном сечении площадью A полосы действует продольная сила $N = F$.

Номинальное напряжение равно

$$\sigma = F / A.$$

Концентрация напряжений имеет местный характер, поскольку с удалением от концентратора напряжения быстро падают, приближаясь к своим номинальным значениям. График распределения напряжений возле концентратора показан на рис. 25.4 (иногда их называют местными напряжениями).

Явление концентрации напряжений легко понять с помощью так называемой гидродинамической аналогии. Теоретическими и экспериментальными исследованиями доказано сходство между распределением напряжений в деталях и скоростями и направлениями отдельных струй потока воды, протекающего по трубе, имеющей форму исследуемой детали. В прямой трубе постоянного поперечного сечения скорость потока во всех точках сечения одинакова; постоянными остаются и напряжения во всех точках сечения прямого бруса постоянного сечения.

Любое изменение поперечного сечения будет являться препятствием для потока. При сужении трубы скорость потока увеличивается, а при расширении — уменьшается. Аналогичным образом напряжение в сечениях прямого бруса увеличивается или уменьшается при изменении размеров и формы сечения.

С количественной стороны концентрацию напряжений характеризует теоретический коэффициент концентрации напряжений K_{σ} . Коэффициент K_{σ} равен отношению наибольшего местного напряжения $\sigma_{\max}$ к номинальному напряжению σ :

$$K_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma.$$

В случае концентрации касательных напряжений по аналогии принимают

$$K_{\tau} = \tau_{\max} / \tau.$$

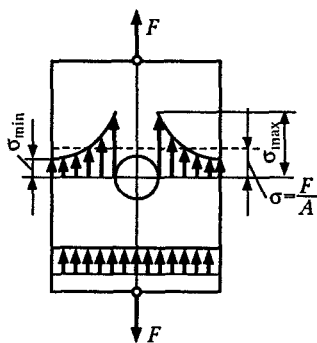


Рис. 25.4

Иногда теоретический коэффициент концентрации напряжений обозначают α_σ и α_τ .

Концентрация напряжений по-разному влияет на прочность пластичных и хрупких материалов. Существенное значение при этом имеет и характер нагрузки. Если взять пластичный материал, нагруженный статически, то при увеличении нагрузки рост наибольших местных напряжений при достижении предела текучести приостанавливается вследствие местной текучести материала, и произойдет выравнивание напряжения по сечению. Отсюда можно сделать вывод, что при статической нагрузке пластичные материалы малочувствительны к концентрации напряжений.

При нагрузках, быстро изменяющихся во времени, выравнивание напряжений произойти не успевает, поэтому концентрацию напряжений необходимо учитывать и для пластичных материалов.

При расчетах на прочность деталей из хрупких материалов концентрацию напряжений необходимо учитывать и при статической нагрузке, поскольку неравномерность распределения напряжений вследствие их концентрации сохраняется на всех стадиях нагружения.

Теоретический коэффициент концентрации K_t отражает влияние концентратора напряжений в условиях, далеких от разрушения детали, поэтому вводится понятие эффективного коэффициента концентрации напряжений, обозначаемого K_σ или K_τ .

Эффективным коэффициентом концентрации напряжений называется отношение предела выносливости σ_{-1} образца без концентрации напряжений к пределу выносливости σ_{-1k} образцов с концентрацией напряжений, имеющих такие же абсолютные размеры, как и гладкие образцы:

$$K_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_{-1k} \text{ и } K_\tau = \tau_{-1} / \tau_{-1k}.$$

Сравнение показывает, что эффективный коэффициент концентрации всегда меньше теоретического.

Для стальных валов при $\sigma_b \leq 800$ МПа принимают $K_\sigma \approx 1,4 \dots 2,5$.

Влияние абсолютных размеров детали. На основании опытов установлено, что предел выносливости зависит от абсолютных размеров поперечного сечения образца: с увеличением размеров сечения предел выносливости уменьшается. Эта закономерность объясняется тем, что с увеличением объема материала возрастает вероятность наличия в нем неоднородностей строения и нарушений сплошности, что приводит к появлению очагов концентрации напряжений.

Влияние абсолютных размеров детали учитывается введением в расчетные формулы соответствующего коэффициента.

Коэффициентом влияния абсолютных размеров поперечного сечения K_d называется отношение преде-

ла выносливости гладких образцов диаметра d к пределу выносливости гладких образцов стандартных размеров:

$$K_d = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1}.$$

Для стальных валов $K_d = 0,52 \dots 0,95$.

Влияние состояния поверхности детали. На предел выносливости влияют шероховатость поверхности детали и поверхностное упрочнение.

С увеличением шероховатости поверхности предел выносливости понижается, что учитывается введением в расчетные формулы коэффициента влияния шероховатости поверхности K_F .

Коэффициентом влияния шероховатости поверхности называется отношение предела выносливости образцов с данной шероховатостью поверхности к пределу выносливости гладкого стандартного образца.

Значения этого коэффициента лежат в пределах

$$K_F = 0,45 \dots 1,0.$$

Для повышения сопротивления усталости широко применяются различные способы упрочнения поверхностей деталей, например поверхностная закалка, химико-термическая обработка, обкатка роликами, дробеструйная обработка и др. Отношение предела выносливости упрочненных образцов к пределу выносливости неупрочненных образцов называется коэффициентом влияния поверхностного упрочнения и обозначается K_v . Обычно $K_v = 1,1 \dots 2,8$.

Общий коэффициент снижения предела выносливости обозначается K и определяется по формуле

$$K = \frac{K_{\sigma(\tau)} / K_d + 1 / K_F - 1}{K_v}.$$

25.3. Расчеты на сопротивление усталости

Расчеты на сопротивление усталости (или упрощенно — расчеты на усталость) имеют в технике очень большое значение. На усталость при изгибе рассчитывают валы и вращающиеся оси, на контактную усталость и изгиб рассчитывают зубья зубчатых передач, катки фрикционных передач и многие другие детали. Потеря работоспособности и поломки деталей конструкций нередко происходят из-за усталости материала.

Расчеты на усталость нередко выполняются как проверочные. В результате получают фактические коэффициенты запаса прочности s , которые сравнивают с допускаемыми для данной конструкции коэффициентами запаса прочности $[s]$ по условию:

$$s \geq [s].$$

Обычно для деталей $[s] = 1,3 \dots 3$ и более в зависимости от вида и назначения детали.

При *симметричном* цикле изменения напряжений коэффициент запаса прочности определяют по следующим формулам:

для растяжения (сжатия)

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1p}}{K\sigma};$$

для кручения

$$s_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K\tau};$$

для изгиба

$$s_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma};$$

где σ и τ — номинальные значения максимальных нормальных и касательных напряжений; K — коэффициент снижения предела выносливости.

При работе деталей в условиях *асимметричного* цикла коэффициенты запаса прочности определяют по формулам Серенсена—Кинасошвили:

$$s_{\sigma} = \sigma_{-1} / (K\sigma_a + \psi_{\sigma}\sigma_m); \quad s_{\tau} = \tau_{-1} / (K\tau_a + \psi_{\tau}\tau_m),$$

где σ_a и σ_m (τ_a и τ_m) — амплитуда и среднее напряжение цикла; ψ_{σ} и ψ_{τ} — коэффициенты чувствительности к асимметрии цикла, определяемые по формулам:

$$\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0; \quad \psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0,$$

где σ_{-1} и σ_0 (τ_{-1} и τ_0) — пределы выносливости при симметричном и отнулевом циклах.

Ранее было установлено, что при прочих равных условиях предел выносливости при симметричном цикле ниже, чем при асимметричном, т.е. симметричный цикл является наиболее опасным. Поэтому при очень точных и ответственных расчетах применяют формулы Серенсена—Кинасошвили. При упрощенных расчетах можно полагать, что нормальные и касательные напряжения изменяются по симметричному циклу. Это дает небольшое отклонение от точного расчета в сторону увеличения запаса прочности.

В случае сложного сопротивления (изгиб и кручение, кручение и растяжение или сжатие), т.е. при упрощенном плоском напряженном состоянии, общий коэффициент запаса прочности s определяют из выражения

$$1/s^2 = 1/s_{\sigma}^2 + 1/s_{\tau}^2, \text{ откуда } s = s_{\sigma}s_{\tau} / \sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2},$$

где s_σ — коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям; s_τ — коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям.

Формулы для определения s_σ и s_τ были приведены ранее.

25.4. Сопротивление материалов при инерционной и ударной нагрузке

Расчеты при инерционной нагрузке. Расчеты с учетом инерционных нагрузок ведутся известным из теоретической механики методом кинестатики, основанном на принципе Д'Аламбера. Согласно этому принципу все активные и реактивные силы, приложенные к телу, вместе с силами инерции образуют систему взаимно уравновешенных сил, удовлетворяющую всем условиям равновесия. Таким образом, задачи динамики и сопромата решаются методами статики.

В качестве примера рассмотрим расчет тонкостенного кольца, равномерно вращающегося в своей плоскости с угловой скоростью ω (рис. 25.5, а). Полученная в результате расчета формула напряжений используется при расчете ободов маховиков и напряжений в ремнях ременных передач.

При равномерном вращении нормальное ускорение любой точки кольца $a_n = v^2/R = \omega^2 R$, где v — окружная скорость, R — средний радиус кольца. Касательное ускорение $a_\tau = 0$, так как $\omega = \text{const}$.

Применяя принцип Д'Аламбера, приложим к каждому элементу кольца центробежную силу инерции. Эти силы распределены равномерно по окружности кольца и направлены по радиусу от центра. На единицу длины окружности кольца приходится сила инерции

$$q^{\text{ин}} = m_1 a_n,$$

где $m_1 = \rho A$ — масса единицы дуги кольца; A — площадь поперечного сечения; ρ — плотность материала кольца.

Подставляя выражения для m_1 и a_n , получим

$$q^{\text{ин}} = \rho A v^2 / R.$$

Определим внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях кольца, для чего рассечем его по диаметру и рассмотрим равновесие оставленной части (рис. 25.5, б).

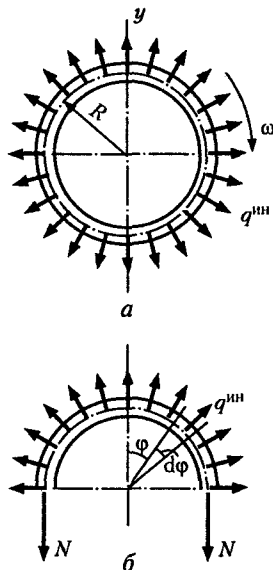


Рис. 25.5

Поскольку кольцо тонкое, то можно предположить, что нормальные напряжения распределены по его поперечному сечению равномерно, следовательно, кольцо работает на растяжение.

Определим продольные силы N , возникающие в поперечных сечениях. Для этого спроецируем все силы, действующие на полукольцо на ось y . На элемент кольца, соответствующий элементарному центральному углу $d\varphi$, приходится элементарная сила инерции $dF_n^{ин}$, равная

$$dF_n^{ин} = q^{ин} R d\varphi.$$

Проекция этой силы на ось y равна произведению $dF_n^{ин} \cos \varphi$. Поскольку каждая из элементарных сил инерции направлена по радиусу и, следовательно, наклонена к оси y под разными углами, необходимо составлять уравнения равновесия в интегральной форме (угол φ изменяется от $-\pi/2$ до $+\pi/2$):

$$\sum Y = 0; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho A v^2 \cos \varphi d\varphi - 2N = 0,$$

откуда

$$2N = \rho A v^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \rho A v^2 \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\rho A v^2$$

или

$$N = \rho A v^2.$$

Определим нормальное напряжение в поперечном сечении кольца:

$$\sigma = N / A = \rho A v^2 / A = \rho v^2.$$

Отметим, что напряжения не зависят от площади поперечного сечения кольца и пропорциональны квадрату окружной скорости.

Запишем условие прочности:

$$\sigma = \rho v^2 \leq [\sigma_p],$$

откуда определим допускаемую окружную скорость:

$$[v] = \sqrt{[\sigma_p] / \rho}.$$

Вычислим допускаемую окружную скорость, если кольцо изготовлено из стали плотностью $\rho = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma_p] = 160 \text{ МПа}$. Тогда

$$[v] = \sqrt{[\sigma_p] / \rho} = \sqrt{160 \cdot 10^6 / (0,8 \cdot 10^4)} = 140 \text{ м/с}.$$

Расчеты при ударной нагрузке. Ударом называется совокупность явлений, возникающих при столкновении двух твердых тел. Удар может быть упругим и неупругим; в последнем случае ударяющее тело не отскакивает от ударяемой упругой системы, а продолжает двигаться вместе с ней. При ударе за очень малый промежуток времени (доли секунды) происходит резкое изменение относительной скорости соударяющихся тел, в результате чего возникают значительные ударные, или мгновенные, силы.

Ударные нагрузки имеют в технике широкое применение, например при ковке, штамповке и чеканке металла, забивке костылей, гвоздей и свай, в вибротехнике. Сопроотивление материалов при ударной нагрузке существенно отличается от поведения материала при статическом нагружении.

При рассмотрении примера действия ударной нагрузки будем считать, что напряжения не превышают предел пропорциональности, т.е. подчиняются закону Гука, а удар будем полагать абсолютно неупругим.

Рассмотрим напряжения и деформации при осевом ударе стержня постоянного сечения (рис. 25.6).

Груз G падает с высоты h на недеформирующийся диск, укрепленный на конце стержня длиной l . Работа, производимая грузом G при падении, равна потенциальной энергии U деформации стержня:

$$G(h + \Delta l_d) = \frac{\Delta l_d^2 EA}{2l},$$

так как $U = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{\Delta l^2 EA}{2l}$ (см. гл. 19).

Здесь E — модуль упругости материала стержня; Δl_d — его динамическое удлинение; A — площадь поперечного сечения стержня.

Полученное выражение перепишем так:

$$\Delta l_d^2 - \frac{2Gl}{EA} \Delta l_d - \frac{2Ghl}{EA} = 0.$$

Статическое удлинение стержня равно

$$\Delta l_{ст} = Gl / (EA),$$

тогда квадратное уравнение примет вид

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{ст} \Delta l_d - 2\Delta l_{ст} h = 0.$$

Решая это уравнение, получим

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} + \sqrt{\Delta l_{ст}^2 + 2\Delta l_{ст} h}$$

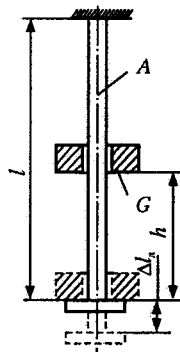


Рис. 25.6

(второй корень не определяется, так как он дает отрицательное значение для Δl_d).

Выражение для Δl_d преобразуем к виду

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} (1 + \sqrt{1 + 2h / \Delta l_{ст}}).$$

Введем обозначение

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h / \Delta l_{ст}},$$

где k_d — коэффициент динамичности.

Тогда

$$\Delta l_d = k_d \Delta l_{ст},$$

т.е. наибольшее перемещение, вызываемое действием ударной нагрузки, равно произведению коэффициента динамичности на перемещение от статической нагрузки (в данном случае силы тяжести падающего груза).

На основании линейной зависимости (по закону Гука) между силами и перемещениями можно записать

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст},$$

где σ_d — динамическое напряжение.

Определение перемещений и напряжений при ударе сводится, таким образом, к определению перемещений и напряжений, вызванных статически приложенной силой, равной силе тяжести падающего груза, и вычислению коэффициента динамичности.

Заметим, что полученные формулы верны как для случая продольного (осевого) удара по стержню, так и для случая поперечного удара по балке.

Рассмотрим случай внезапного приложения нагрузки, что равносильно действию груза, падающего с высоты $h = 0$. Тогда из формулы для определения коэффициента динамичности следует, что $k_d = 2$, вследствие чего получаем $\Delta l_d = 2\Delta l_{ст}$ и $\sigma_d = 2\sigma_{ст}$, т.е. перемещения и напряжения в результате действия внезапно приложенной силы *вдвое больше*, чем при статическом действии той же силы.

Из формулы для определения коэффициента динамичности видно, что с увеличением $\Delta l_{ст}$ (т.е. уменьшением жесткости стержня) k_d уменьшается. Поэтому в технике для смягчения ударов применяют пружины и рессоры — детали, имеющие малую жесткость (большую податливость).

Глава 26

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

26.1. Общие сведения

Продольным изгибом называется изгиб первоначально прямолинейного стержня вследствие потери устойчивости под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил. Продольный изгиб возникает при достижении сжимающими силами и напряжениями критического значения.

Расчеты на прочность и жесткость, приведенные в предыдущих главах, делались в предположении, что при деформации конструкции между внешними нагрузками и вызываемыми ими внутренними силами существует устойчивая форма равновесия, при которой малым возмущающим воздействиям соответствуют малые отклонения конструкции от первоначальной формы. Нагрузки, при превышении которых происходит потеря устойчивости (критическое состояние), называют критическими. Опасность потери устойчивости особенно велика для тонкостенных конструкций, стержней, пластинок и оболочек.

Рассмотрим тонкий стальной стержень, длина которого значительно больше поперечных размеров, сжимаемый силой F , немного большей критической силы $F_{кр}$ (рис. 26.1).

Применяя метод сечений, убеждаемся, что в результате искривления оси в поперечных сечениях стержня возникают два внутренних силовых фактора — продольная сила $N = F$ и изгибающий момент $M_{из}$.

Таким образом, искривленный стержень испытывает сочетание деформаций центрального сжатия и изгиба.

При сжимающих силах, даже немного превышающих критическую силу, напряжения изгиба могут непосредственно угрожать прочности конструкции. Поэтому критическое состояние конструкции считается недопустимым.

Для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы действующая на стержень сжимающая сила F была меньше критической $F_{кр}$.

Обозначим допускаемую сжимающую силу $[F]$, тогда

$$[F] = F_{кр} / [s_y],$$

где $[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

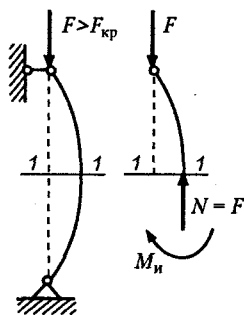


Рис. 26.1

Очевидно, что устойчивость стержня обеспечена, если $[s_y] > 1$. Значение коэффициента запаса устойчивости зависит от назначения стержня и его материала. Обычно для сталей $[s_y] = 1,8 \dots 3$; для чугунов $[s_y] = 5 \dots 5,5$; для дерева $[s_y] = 2,8 \dots 3,2$.

26.2. Формулы Эйлера и Ясинского

Для расчетов стержней на устойчивость необходимо знать способы определения критической силы $F_{кр}$.

Первые исследования устойчивости сжатых стержней были проведены академиком Петербургской Академии наук Леонардом Эйлером (1707 – 1783). Академик С. И. Вавилов писал: «Вместе с Петром I и Ломоносовым Эйлер стал добрым гением нашей Академии, определившим ее славу, ее крепость, ее продуктивность». В дальнейшем большая работа в области теоретического и экспериментального исследования вопросов устойчивости была проведена русским ученым, профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. С. Ясинским (1856 – 1899), опубликовавшим в 1893 г. большую работу «Опыт развития продольного изгиба».

Л. Эйлером была получена формула для определения величины критической силы $F_{кр}$.

Приведем формулу Эйлера без вывода:

$$F_{кр} = \pi^2 EI_{\min} / l_n^2.$$

Здесь E — модуль упругости первого рода; $I_{\min}$ — наименьший из осевых моментов инерции сечения, поскольку искривление стержня происходит в плоскости наименьшей жесткости, в чем нетрудно убедиться, сжимая продольной силой слесарную линейку; l_n — приведенная длина стержня;

$$l_n = \mu l,$$

где l — длина стержня; μ — коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов стержня.

На рис. 26.2 показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и приведены значения μ : оба конца стержня закреплены шарнирно и могут сближаться (рис. 26.2, а); нижний конец жестко зашпелен, верхний свободен (рис. 26.2, б); оба конца жестко зашпелены, но могут сближаться (рис. 26.2, в); нижний конец закреплен жестко, верхний — шарнирно, концы могут сближаться (рис. 26.2, г); нижний конец закреплен жестко, верхний имеет «плавающую заделку» (рис. 26.2, д). Заметим, что чем меньше μ , тем больше критическая сила, а следовательно, и допускаемая сжимающая нагрузка. Например, сжимающая нагрузка стержня, жестко зашпеленного обоими концами ($\mu = 0,5$), может

быть в 16 раз больше нагрузки стержня, защемленного одним концом ($\mu = 2$).

Вывод формулы Эйлера основан на законе Гука, который справедлив только до предела пропорциональности. Поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда. Для определения пределов применимости формулы Эйлера определим критическое напряжение $\sigma_{кр}$, т.е. напряжение, которое возникает в поперечном сечении площадью A стержня при достижении критической силы:

$$\sigma_{кр} = F_{кр} / A = \pi^2 EI_{\min} / [(\mu l)^2 A].$$

Определим наименьший радиус инерции $i_{\min}$ поперечного сечения стержня:

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}.$$

Перепишем формулу для $\sigma_{кр}$ так:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu l / i_{\min})^2.$$

Введем понятие гибкости стержня $\lambda = \mu l / i_{\min}$. Это безразмерная величина, характеризующая размеры стержня и способ закрепления его концов. Окончательно получим:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2.$$

Формулу Эйлера можно применять только при выполнении условия

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{\text{пл}},$$

где $\sigma_{\text{пл}}$ — предел пропорциональности материала стержня. Следовательно, должно быть

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{\text{пл}}} = \lambda_{\text{пред}}.$$

Величину, стоящую в правой части неравенства, называют предельной гибкостью. Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня.

Условие применимости формулы Эйлера можно записать так:

$$\lambda \geq \lambda_{\text{пред}},$$

т.е. формула Эйлера применима лишь в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости.

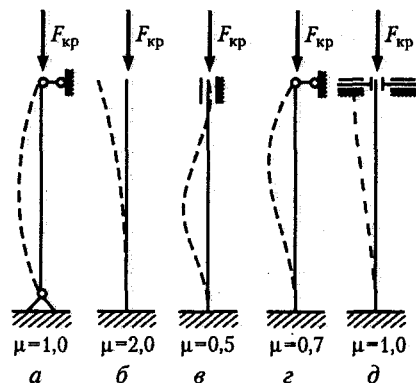


Рис. 26.2



Рис. 26.3

Определим значение $\lambda_{\text{пред}}$ для низкоуглеродистой стали Ст3, для которой $\sigma_{\text{пл}} = 200$ МПа, а $E = 2 \cdot 10^5$ МПа:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{314^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 / (200 \cdot 10^6)} = 100.$$

Для стержней из низкоуглеродистой стали формула Эйлера применима, если их гибкость $\lambda \geq 100$.

Аналогично можно определить значения предельной гибкости для других материалов. В частности, для чугуна $\lambda_{\text{пред}} = 80$; для дерева (сосна) $\lambda_{\text{пред}} = 110$.

В тех случаях, когда гибкость стержней меньше предельной, формула Эйлера становится неприменимой и при расчетах пользуются эмпирической формулой Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda,$$

где a и b — коэффициенты, зависящие от материала и определяемые по таблицам справочников (см., например, [7]).

В частности, для стали Ст3 при гибкостях $\lambda \approx 40 \dots 100$ можно принимать $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа. При гибкостях $\lambda < 40$ стержни можно рассчитывать на сжатие, т.е. по формуле

$$\sigma_{\text{с}} = F/A.$$

Итак, при малых значениях λ ($\lambda < 40$) стержни из низкоуглеродистой стали рассчитывают на простое сжатие; при средних ($40 \leq \lambda < 100$) расчет ведут по формуле Ясинского, а при больших ($\lambda \geq 100$) — по формуле Эйлера. График зависимости критического напряжения от гибкости для стержней из низкоуглеродистой стали изображен на рис. 26.3.

26.3. Расчеты прямолинейных стержней на устойчивость

Существует три вида расчетов на устойчивость прямолинейных стержней — проектный, проверочный и силовой. Рассмотрим содержание каждого из этих расчетов.

Проектный расчет. Определяют минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня по формуле

$$I_{\min} = F[s_y](\mu l)^2 / (\pi^2 E),$$

где F — действующая нагрузка; $[s_y]$ — допускаемый коэффициент запаса устойчивости; μ — коэффициент приведения длины стержня; l — длина стержня; E — модуль продольной упругости.

Далее находят гибкость стержня λ по формуле

$$\lambda = \mu l / i_{\min},$$

где $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$; A — площадь сечения.

Полученную гибкость сравнивают с предельной для данного материала.

Проверочный расчет. Определяют действительный коэффициент запаса устойчивости s_y и сравнивают его с допускаемым по формуле

$$s_y = F_{\text{кр}} / F \geq [s_y].$$

Силовой расчет. Определяют допускаемую нагрузку $[F]$ по формуле

$$[F] = F_{\text{кр}} / [s_y].$$

Расчет сжатых стержней на устойчивость можно свести к расчету на простое сжатие. При расчете применяют следующую формулу:

$$[F] = \varphi[\sigma_c]A,$$

где $[\sigma_c]$ — допускаемое напряжение на сжатие; φ — коэффициент продольного изгиба.

Значение φ зависит от гибкости стержня, его материала и определяется для сталей по табл. 26.1.

Расчеты показывают, что при продольном изгибе наиболее выгодными являются кольцевые и коробочные тонкостенные сечения, имеющие относительно большой момент инерции.

Таблица 26.1

λ	30	50	60	80	100	120	140	160
φ	0,92	0,86	0,82	0,70	0,51	0,37	0,29	0,24
φ^*	0,91	0,83	0,79	0,65	0,43	0,30	0,23	0,19

Примечание. Значения φ^* относятся к сталям повышенного качества ($\sigma_r \geq 320$ МПа).

Пример 26.1. Проверить на устойчивость стойку, изображенную на рис. 26.4, если $l = 3$ м, $[s_y] = 2$, материал стойки — сталь Ст3, $F = 65$ кН, $d = 60$ мм.

Решение. Для заданного закрепления концов стойки $\mu = 1$. По справочнику [7] определим модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Проверим применимость формулы Эйлера.

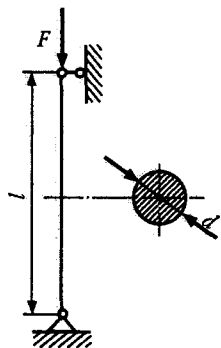


Рис. 26.4

Для круга

$$I = \pi d^4 / 64; \quad i = \sqrt{I/A}; \quad A = \pi d^2 / 4,$$

откуда

$$i = d/4 = 60 \cdot 10^{-3} / 4 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Определим гибкость стойки:

$$\lambda = \mu l / i = 1 \cdot 3 / (15 \cdot 10^{-3}) = 200 > 100,$$

следовательно, формула Эйлера применима.

Вычислим критическую силу:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 60^4 \cdot 10^{-12}}{(1 \cdot 3)^2 \cdot 64} =$$

$$= 143 \cdot 10^3 \text{ Н} = 143 \text{ кН.}$$

Определим коэффициент устойчивости: $s_y = F_{\text{кр}} / F = 143 / 65 = 2,2 > 2$, следовательно, устойчивость стойки обеспечена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батъ М.И., Джениридзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1984.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1985.
3. Гернет М.М. Курс теоретической механики. — М.: Высш. шк., 1973.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1998.
5. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1990.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Наука, 1998.
7. Ануриев В.И. Справочник конструктора-машиностроителя: В 2-х кн. — М.: Машиностроение, 1973.
8. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1975.
9. Кинашвили Р.С. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1975.
10. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наукова думка, 1975.
11. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. — Киев: Выща шк., 1974.
12. Сопротивление материалов / Смирнов А.Ф. и др. — М.: Высш. шк., 1975.
13. Степин П.А. Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1988.
14. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1984.

Домашние расчетно-графические работы. Содержание, оформление и методика проведения

Для закрепления и контроля знаний и умений студентов рекомендуется выдавать восемь индивидуальных домашних расчетно-графических работ, четыре по теоретической механике и четыре по сопротивлению материалов.

Предлагаемая методика дает возможность преподавателю организовать проведение этих работ с минимальными затратами учебного времени, исключает необходимость ведения специального учета выданных вариантов, стимулирует регулярную работу всех студентов над изучаемым материалом и дает возможность накапливать оценки по предмету.

Эта методика проверена на практике преподавателями в течение нескольких лет и дала безусловно положительные результаты.

В приложении приведены универсальные (т.е. пригодные для всех вариантов) тексты заданий, имеющие все необходимые указания по содержанию и оформлению каждой работы. Кроме того, даны образцы оформления графической части домашних работ.

Надписи на схемах необходимо выполнять чертежным шрифтом, лист оформлять рамкой и штампом.

Сущность предлагаемой методики организации и проведения домашних расчетно-графических работ заключается в следующих положениях:

1. Универсальный текст задания преподаватель не диктует студентам, а они берут его из приложения.

2. Индивидуальные варианты заданий выдаются, как правило, из многовариантных задач современных задачников по предметам технической механики, причем номер варианта соответствует порядковому номеру студента в классном журнале, что избавляет преподавателя от необходимости ведения специального учета (не исключается возможность составления преподавателем собственных таблиц с вариантами заданий).

3. Срок сдачи работы назначается в соответствии с календарно-тематическим планом преподавателя.

4. Все задания студенты выполняют в специальной тетради для домашних расчетно-графических заданий по технической механике, где преподаватель делает замечания по работе и выставляет оценку по пятибалльной системе, проводя в случае необходимости

дополнительный опрос. Оценка за каждую работу выставляется в специально выделенной графе классного журнала.

Задание 1

Аналитическим и графическим способом определить силы в стержнях или реакции связей заданной системы. Сравнить результаты двух решений и вычислить в процентах относительную погрешность δ графического решения по формуле

$$\delta = \left| \frac{R_{\text{гр}} - R_{\text{ан}}}{R_{\text{ан}}} \right| 100.$$

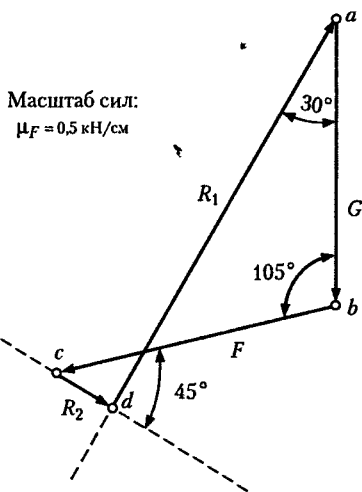
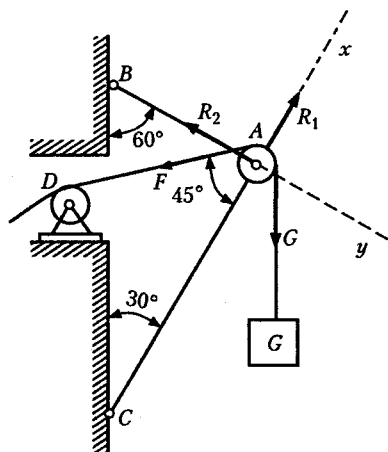
Относительная погрешность не должна превышать 5%.

На первой странице, отведенной для задания, привести его название, номер варианта, текст и все данные к задаче.

Графическую часть работы выполнить карандашом на листе миллиметровой бумаги формата А4. Выбрать и указать на чертеже масштаб сил, а также привести сверху листа все данные к задаче.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ В СТЕРЖНЯХ

Дано: $G = 2 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$



Масштаб сил:
 $\mu_F = 0,5 \text{ кН/см}$

Усилия в стержнях:

$$R_1 = ad\mu_F = 6,29 \text{ см} \cdot 0,5 \text{ кН/см} = 3,145 \text{ кН}$$

$$R_2 = cd\mu_F = 0,85 \text{ см} \cdot 0,5 \text{ кН/см} = 0,425 \text{ кН}$$

Относительная погрешность:

$$\delta_1 = 0, \delta_2 = \frac{0,425 - 0,414}{0,414} 100 = 2,66 \%$$

Рис. П.1.1

Название задания «Определение реакций связей» или «Определение сил в стержнях». Срок сдачи... (по графику).

Образец выполненной графической части задания, соответствующего этому тексту, приведен на рис. П.1.1.

Задание 2

Определить опорные реакции балки, нагруженной плоской системой произвольно расположенных (или параллельных) сил. Путем составления контрольного уравнения равновесия произвести проверку решения. На первой странице, отведенной для задания, привести его название, номер варианта, текст и все данные к задаче.

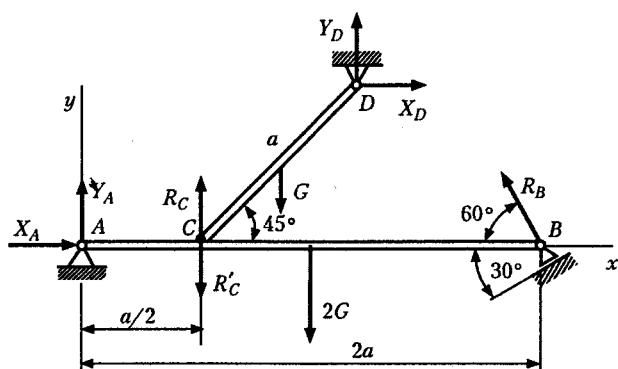


Рис. П.1.2

Вычертить расчетную схему балки, выдерживая в примерном масштабе ее продольные размеры. Название задания «Определение опорных реакций балки». Срок сдачи... (по графику).

Образец оформления графической части показан на рис. П.1.2.

Задание 3

Определить опорные реакции пространственно нагруженного вала. Путем составления двух контрольных уравнений равновесия произвести проверку решения. На первой странице, отведенной для задания, привести его название, номер варианта, текст и все данные к задаче.

Вычертить в аксонометрической проекции расчетную схему вала, выдерживая в масштабе его продольные размеры. Название задания «Определение реакций подшипников вала». Срок сдачи... (по графику).

Образец оформления графической части см. на рис. 7.6.

Задание 4

Определить координаты центра тяжести площади сложного сечения, состоящего из стандартных профилей прокатных сталей.

На листе миллиметровой бумаги формата А4 в стандартном масштабе карандашом вычертить заданное сечение, выдерживая уклоны, выполняя сопряжения и надписи по правилам машиностроительного черчения. Указать масштаб изображения. На первой странице, отведенной для задания, привести его название, номер варианта, текст и все данные к задаче, взятые из таблиц соответствующего ГОСТа. Название задания «Определение положения центра тяжести площади сечения». Срок сдачи... (по графику).

Образец оформления графической части см. на рис. 8.8.

Задание 5

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и определить двумя способами (с помощью эпюры продольных сил и принципа независимости действия сил) абсолютную деформацию ступенчатого бруса. Определить коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести, если материал бруса — сталь Ст3 ($\sigma_T = 240$ МПа).

Графическую часть работы выполнить карандашом на листе миллиметровой бумаги формата А4. На листе привести все данные к задаче. Название задания «Расчет ступенчатого бруса». Срок сдачи... (по графику).

Образец выполненной графической части задания, соответствующего этому тексту, приведен на рис. П.1.3.

Задание 6

Для стального трансмиссионного вала требуется:

1. Определить значения вращающих моментов, подводимого к шкиву 1 и снимаемых со шкивов 2, 3 и 4.
2. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить требуемый диаметр вала из расчетов на прочность и жесткость, принимая данные значения $[\tau_k]$ и $[\varphi_0']$ (диаметр вала считать по всей длине постоянным).
4. Определить из расчета на прочность диаметры участков ступенчатого вала. Окончательно принимаемые значения диаметров должны быть округлены до ближайшего большего стандартного значения.

Графическую часть работы выполнить карандашом на листе миллиметровой бумаги формата А4. Вычертить ступенчатый вал, выдерживая только масштаб диаметров, а также привести все дан-

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО БРУСКА

Дано: $F_1 = 15 \text{ кН}$, $F_2 = 14 \text{ кН}$, $F_3 = 9 \text{ кН}$,

$a = 0,15 \text{ м}$, $b = 0,5 \text{ м}$,

$A_1 = 180 \text{ мм}^2$, $A_2 = 110 \text{ мм}^2$

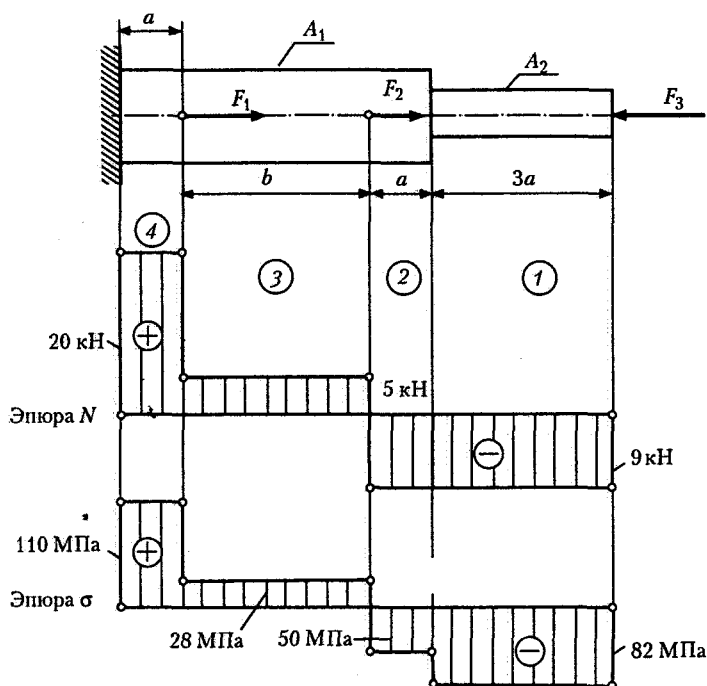


Рис. П.1.3

ные к заданию. Название чертежа «Расчет вала на кручение». Срок сдачи задания... (по графику).

Образец выполненной графической части задания, соответствующего этому тексту, приведен на рис. П.1.4.

Задание 7

Для заданной стальной балки:

1. Вычертить расчетную схему и заданное сечение.
2. Построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Вычислить момент инерции относительно оси x сечения балки.
4. Вычислить для того же сечения момент сопротивления изгибу W_x .
5. Вычислить максимальное нормальное напряжение в опасном сечении балки.

РАСЧЕТ ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ

Дано: $P_1 = 70 \text{ кВт}$, $P_2 = 30 \text{ кВт}$, $P_3 = 15 \text{ кВт}$, $P_4 = 25 \text{ кВт}$,
 $n = 200 \text{ мин}^{-1}$, $[\tau_k] = 20 \text{ МПа}$,
 $[\varphi_0'] = 0,3 \text{ град/м}$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

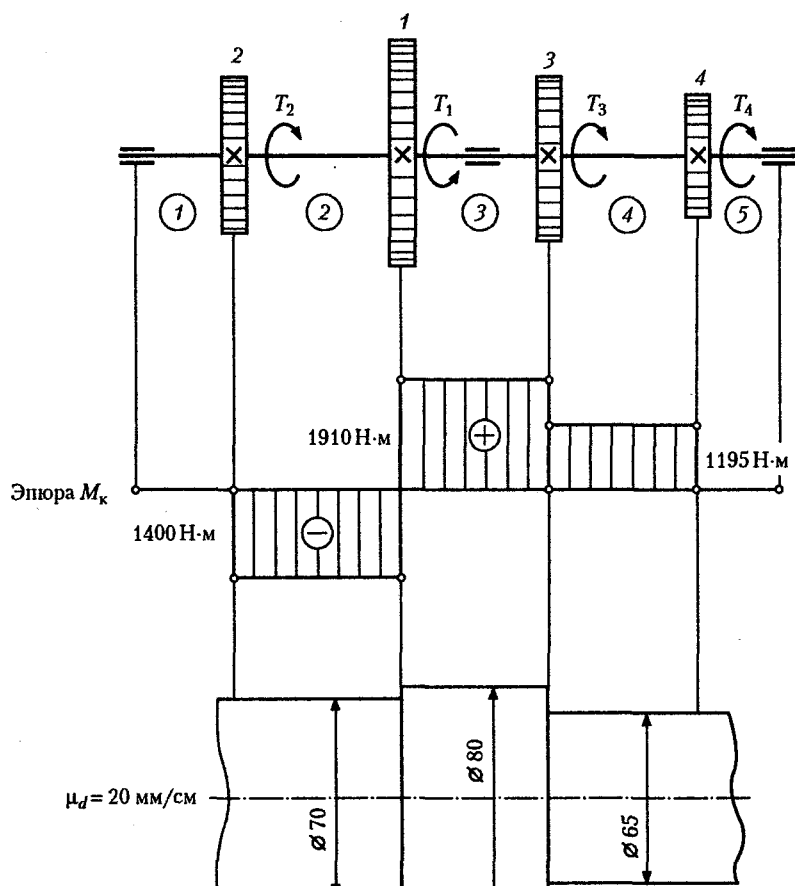


Рис. П.1.4.

6. Вычислить действительный коэффициент запаса прочности по пределу текучести σ_T .

Графическую часть работы выполнить карандашом на листе миллиметровой бумаги формата А4. В левом верхнем углу привести все данные к задаче. Название задания «Расчет балки на изгиб». Срок сдачи... (по графику).

Образец выполненной графической части задания, соответствующего этому тексту, приведен на рис. П.1.5.

РАСЧЕТ БАЛКИ НА ИЗГИБ

Дано:

$$m = 3qa^2 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$F = 2ga \text{ Н},$$

$$a = 2 \text{ м},$$

$$\delta = 16 \text{ мм},$$

$$\alpha = \sigma_r \text{ МПа}$$

$$q = 10 \text{ кН/м}$$

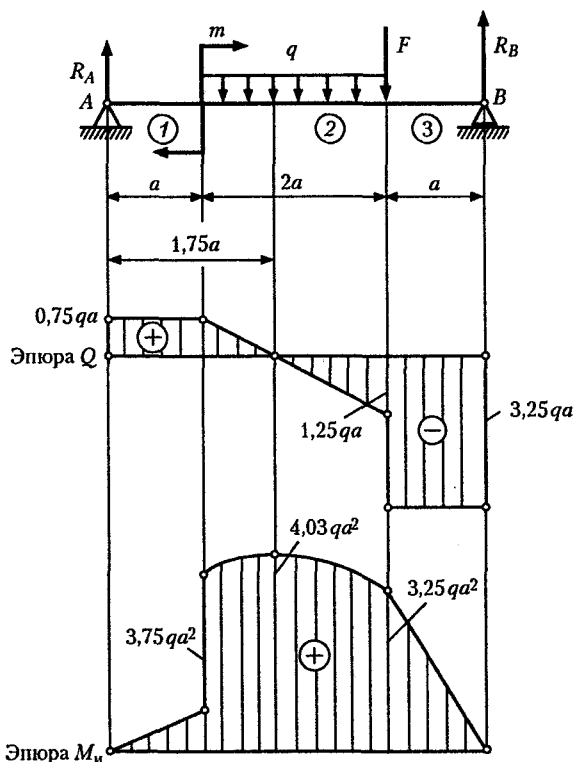
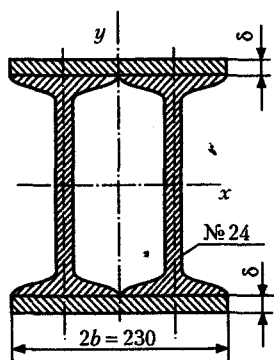


Рис. П.1.5

Задание 8

Для стального вала постоянного сечения заданной передачи требуется:

1. Изобразить расчетную схему вала.
2. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях.
4. Определить диаметр d вала по третьей и пятой теориям прочности и сравнить найденные значения, если предел текучести $\sigma_r = 240 \text{ МПа}$, а допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 3$.

Графическую часть работы выполнить карандашом на листе миллиметровой бумаги формата А4. В левом верхнем углу привести все данные к задаче. Название задания «Расчет вала на изгиб и кручение». Срок сдачи... (по графику).

Образцы оформления графической части см. на рис. 24.6 и 24.7.

Программированные тренировочные карточки для подготовки к контрольным работам

В соответствии с программой дисциплины предполагается проведение четырех контрольных работ, две из которых — по теоретической механике и две — по сопротивлению материалов.

Предположительно установлено, что каждая контрольная работа будет состоять из пяти задач по разным вопросам программы.

Тренировочные карточки предназначены для закрепления практических умений и навыков в решении задач по следующим темам и подтемам:

Контрольная работа 1. Статика

Задача I. Система сходящихся сил.

Задачи II, III. Системы параллельных и произвольно расположенных сил.

Задачи IV, V. Трение, пространственная система сил, центр тяжести площади.

Контрольная работа 2. Кинематика и динамика

Задача I. Кинематика точки.

Задачи II, III. Кинематика вращательного движения тела, метод кинетостатики.

Задачи IV, V. Работа и мощность, общие теоремы динамики, динамика вращательного движения тела.

Контрольная работа 3. Растяжение и сжатие

Задачи I, II. Продольные силы, напряжения.

Задачи III, IV. Закон Гука.

Задача V. Расчеты на прочность.

Контрольная работа 4. Кручение и изгиб

Задача I. Расчеты на прочность при кручении.

Задачи II, III, IV. Изгибающий момент и поперечная сила.

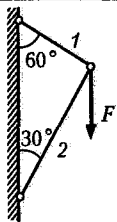
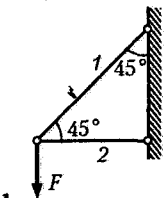
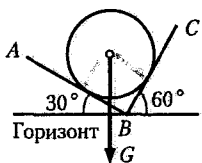
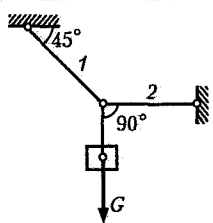
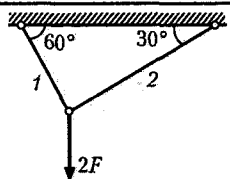
Задача V. Расчеты на прочность при изгибе.

Каждая тренировочная карточка содержит пять задач с двумя вариантами данных (данные варианта Б заключены в круглые скобки). Каждая задача имеет четыре ответа, один из которых является правильным для варианта А и один — правильный для варианта Б.

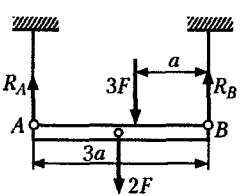
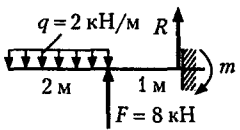
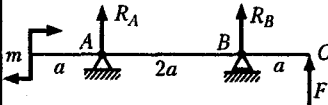
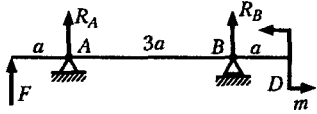
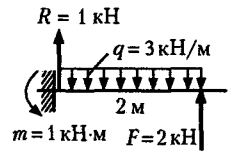
Рекомендуется, если это возможно, решать задачи несколькими способами, например, задачу I контрольной работы 1 целесообразно решить тремя способами: разложением силы на две составляющие, а также геометрическим и аналитическим методами.

КАРТОЧКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

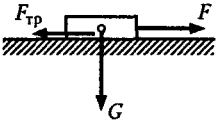
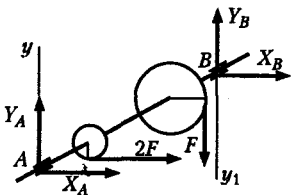
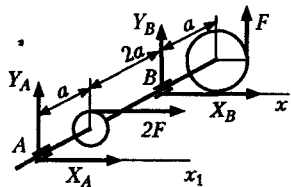
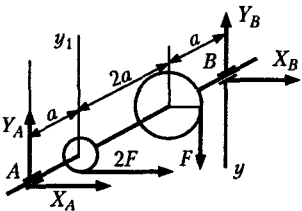
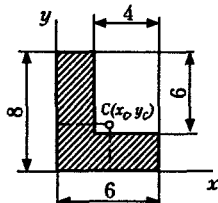
Карточка 1 к задаче I

Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Определить силу S в стержне 1 (2) шарнирно-стержневой системы	$S = F/2$	1
		$S = F$	2
		$S = F\sqrt{3}$	3
		$S = F\frac{\sqrt{3}}{2}$	4
2	 Определить силу S в стержне 1 (2) шарнирно-стержневой системы	$S = F\frac{\sqrt{2}}{2}$	5
		$S = F$	6
		$S = F\sqrt{3}$	7
		$S = \sqrt{2}$	8
3	 Определить силу давления N однородного шара весом G на гладкую плоскость AB (BC)	$N = G\sqrt{2}$	9
		$N = G/2$	10
		$N = G\frac{\sqrt{3}}{2}$	11
		$N = G\sqrt{3}$	12
4	 Груз весом G подвешен на тросе 1 и оттянут в сторону тросом 2. Определить натяжение R троса 1 (2)	$R = G\sqrt{2}$	13
		$R = G\frac{\sqrt{2}}{2}$	14
		$R = G\frac{\sqrt{3}}{2}$	15
		$R = G$	16
5	 Определить силу S в стержне 1 (2) шарнирно-стержневой системы	$S = F\sqrt{3}$	17
		$S = F\frac{\sqrt{3}}{2}$	18
		$S = F$	19
		$S = F/2$	20

Карточка 2 к задачам II и III

Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 На двух тросах горизонтально подвешен однородный брус, нагруженный силой $3F$. Вес бруса $2F$. Определить реакцию R_A (R_B) троса	$R = 4F$	1
		$R = F$	2
		$R = 3F$	3
		$R = 2F$	4
2	 Определить реакцию $R(m)$ заделки консольной балки	$R = -4 \text{ кН},$ $m = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$	5
		$R = 0 \text{ кН},$ $m = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$	6
		$R = 2 \text{ кН},$ $m = -1 \text{ кН} \cdot \text{м}$	7
		$R = 4 \text{ кН},$ $m = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$	8
3	 Составить уравнение моментов относительно точки A (C)	$F \cdot 3a + R_B \cdot 2a - m = 0$	9
		$m + R_A \cdot 3a - R_B a = 0$	10
		$Fa - R_A \cdot 2a + m = 0$	11
		$-m - R_A \cdot 3a - R_B a = 0$	12
4	 Составить уравнение моментов относительно точки D (B)	$-F \cdot 4a - R_A \times 3a + m = 0$	13
		$-F \cdot 5a - R_A \times 4a - R_B a = 0$	14
		$R_B a - R_A \cdot 4a - F \cdot 5a = 0$	15
		$Fa - R_A \cdot 4a - R_B a + m = 0$	16
5	 Во сколько раз нужно изменить реакцию $R(m)$ заделки, чтобы консольная балка находилась в равновесии	Не изменять	17
		В 2 раза	18
		В 4 раза	19
		В 3 раза	20

Карточка 3 к задачам IV и V

Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Определить вес G груза, который силой F равномерно перемещается по шероховатой горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения $f = 0,2$ ($f = 0,25$)	$G = 2F$	1
		$G = 5F$	2
		$G = 3F$	3
		$G = 4F$	4
2	 Составить уравнение равновесия вала $\sum Y = 0$ ($\sum Y_1 = 0$)	$Y_A - F + Y_B = 0$	5
		$Y_B + F + Y_A = 0$	6
		$-Y_B + F + Y_B = 0$	7
		$-Y_B + F - Y_A = 0$	8
3	 Составить уравнение равновесия вала $\sum M_x = 0$ ($\sum M_{x_1} = 0$)	$-Fa + Y_B \cdot 3a = 0$	9
		$Y_B \cdot 3a + F \cdot 4a = 0$	10
		$Fa - Y_A \cdot 3a = 0$	11
		$Y_A \cdot 3a + Fa = 0$	12
4	 Составить уравнение равновесия вала $\sum M_y = 0$ ($\sum M_{y_1} = 0$)	$X_A \cdot 4a - 2F \cdot 2a = 0$	13
		$-X_A \cdot 4a - 2F \cdot 3a = 0$	14
		$-X_A \cdot 2a + X_B \cdot 4a = 0$	15
		$-X_B \cdot 3a + X_A a = 0$	16
5	 Определить положение центра тяжести C площади углового сечения (размеры в см) $x_C - ?$ ($y_C - ?$)	3,5 см	17
		2 см	18
		3 см	19
		2,5 см	20

КАРТОЧКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2

Карточка 4 к задаче I

Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	Точка движется прямолинейно согласно уравнению $s = 2t^3 + 4t$ ($s = 5t^2$) (s — в метрах, t — в секундах). Определить ускорение a точки при $t = 1$ с	$a = 16 \text{ м/с}^2$	1
		$a = 10 \text{ м/с}^2$	2
		$a = 14 \text{ м/с}^2$	3
		$a = 12 \text{ м/с}^2$	4
2	Точка движется по окружности радиусом r согласно уравнению $s = 2 \sin 3t$ ($s = 1 + \sin 8t$) (s — в метрах, t — в секундах). Определить нормальное ускорение a_n точки при $t = 0$, если $r = 2$ м	$a_n = 32 \text{ м/с}^2$	5
		$a_n = 36 \text{ м/с}^2$	6
		$a_n = 18 \text{ м/с}^2$	7
		$a_n = 24 \text{ м/с}^2$	8
3	Точка движется по окружности согласно уравнению $s = 12t^2$ ($s = 2t^2$) (s — в метрах, t — в секундах). Определить касательное ускорение a_t точки при $t = 1$ с	$a_t = 36 \text{ м/с}^2$	9
		$a_t = 12 \text{ м/с}^2$	10
		$a_t = 24 \text{ м/с}^2$	11
		$a_t = 18 \text{ м/с}^2$	12
4	Точка движется по окружности радиусом r с постоянным касательным ускорением $a_t = 3 \text{ м/с}^2$ ($a_t = 2 \text{ м/с}^2$). Определить нормальное ускорение a_n , если $v_0 = 0, t = 2$ с, $r = 4$ м	$a_n = 9 \text{ м/с}^2$	13
		$a_n = 4 \text{ м/с}^2$	14
		$a_n = 12 \text{ м/с}^2$	15
		$a_n = 6 \text{ м/с}^2$	16
5	Точка движется по окружности радиусом $r = 200$ см согласно уравнению $s = 2t^2 + 1$ ($s = 3t^2$) (s — в сантиметрах, t — в секундах). В какой момент времени t нормальное ускорение a_n достигнет значения 18 см/с^2 ?	$t = 15$ с	17
		$t = 10$ с	18
		$t = 20$ с	19
		$t = 25$ с	20

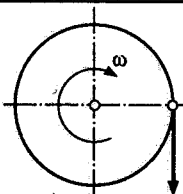
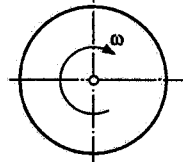
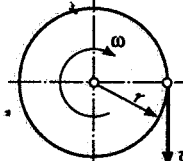
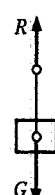
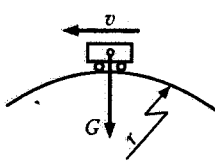
Долгопрудненский авиационный техникум
Электронная библиотека



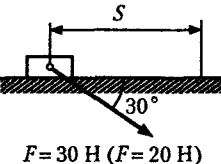
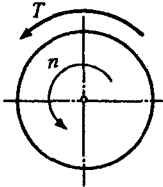
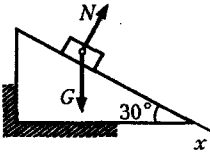
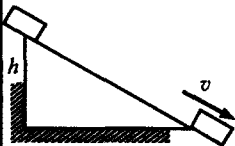
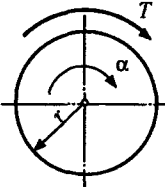
Козловский Александр Юрьевич



Карточка 5 к задачам II и III

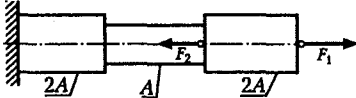
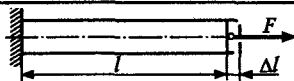
Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Частота вращения диска $n = 90 \text{ мин}^{-1}$ ($n = 150 \text{ мин}^{-1}$). Определить окружную скорость v, если радиус диска $r = 1,5 \text{ м}$ ($r = 0,8 \text{ м}$)	$v = 3,5\pi \text{ м/с}$	1
		$v = 4,5\pi \text{ м/с}$	2
		$v = 5\pi \text{ м/с}$	3
		$v = 4\pi \text{ м/с}$	4
2	 Диск вращается согласно уравнению $\varphi = 3\pi t \text{ рад}$ ($\varphi = 5\pi t \text{ рад}$). Определить частоту вращения n диска	$n = 150 \text{ мин}^{-1}$	5
		$n = 180 \text{ мин}^{-1}$	6
		$n = 120 \text{ мин}^{-1}$	7
		$n = 90 \text{ мин}^{-1}$	8
3	 Диск радиусом $r = 100 \text{ см}$ вращается согласно уравнению $\varphi = 3,5t^2$ ($\varphi = 3t^2$). Определить окружную скорость v при $t = 1 \text{ с}$	$v = 10 \text{ м/с}$	9
		$v = 7 \text{ м/с}$	10
		$v = 9 \text{ м/с}$	11
		$v = 12 \text{ м/с}$	12
4	 Груз G движется вертикально вверх (вниз) с ускорением a. Определить натяжение R нити, на которой висит груз. Дано: $G = 500 \text{ Н}$, $a = 3 \text{ м/с}^2$ (принять $g \approx 10 \text{ м/с}^2$)	$R = 350 \text{ Н}$	13
		$R = 450 \text{ Н}$	14
		$R = 550 \text{ Н}$	15
		$R = 650 \text{ Н}$	16
5	 С какой скоростью v должен двигаться по выпуклому мосту автомобиль, чтобы его давление на мост в верхней точке оказалось равным нулю? Радиус кривизны моста $r = 90 \text{ м}$ ($r = 160 \text{ м}$). Принять $g \approx 10 \text{ м/с}^2$	$v = 40 \text{ м/с}$	17
		$v = 20 \text{ м/с}$	18
		$v = 30 \text{ м/с}$	19
		$v = 10 \text{ м/с}$	20

Карточка 6 к задачам IV и V

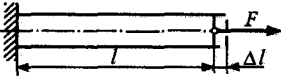
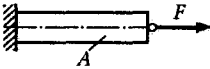
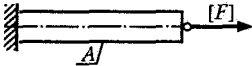
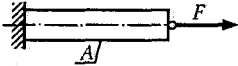
Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Определить работу W силы F, перемещающей груз прямолинейно на расстояние $s = 6$ м ($s = 4$ м) $F = 30$ Н ($F = 20$ Н)	$W = 40\sqrt{3}$ Дж	1
		$W = 90$ Дж	2
		$W = 90\sqrt{3}$ Дж	3
		$W = 4$ Дж	4
2	 К диску, вращающемуся вокруг своей оси с частотой вращения $n = 180$ мин⁻¹, приложен момент $T = 10$ Н·м ($T = 15$ Н·м). Определить мощность P момента T	$P = 60\pi$ Вт	5
		$P = 105\pi$ Вт	6
		$P = 75\pi$ Вт	7
		$P = 90\pi$ Вт	8
3	 Тяжелое тело опускается по идеально гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30°. Определить скорость v, которую приобретает тело через время t после начала движения. Дано: $t = 4$ с ($t = 3$ с). Принять $v_0 = 0, g = 10$ м/с²	$v = 30$ м/с	9
		$v = 20$ м/с	10
		$v = 25$ м/с	11
		$v = 15$ м/с	12
4	 Тяжелое тело спускается с высоты h по идеально гладкой плоскости. Определить скорость v в нижнем положении. Дано: $h = 5$ м ($h = 3,2$ м). Принять $v_0 = 0, g = 10$ м/с²	$v = 10$ м/с	13
		$v = 6$ м/с	14
		$v = 15$ м/с	15
		$v = 8$ м/с	16
5	 Однородный сплошной диск радиусом r и массой m вращается с угловым ускорением $\alpha = 2$ рад/с². Определить вращающий момент, если $m = 10$ кг, $r = 0,8$ м ($r = 0,6$ м)	$T = 4,8$ Н·м	17
		$T = 3,2$ Н·м	18
		$T = 3,6$ Н·м	19
		$T = 6,4$ Н·м	20

КАРТОЧКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 3

Карточка 7 к задачам I, II, III, IV

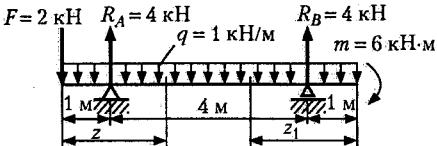
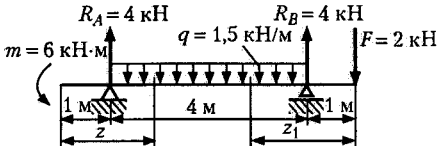
Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Путем построения эпюры определить максимальную продольную силу $N_{\max}$ (по абсолютному значению). Дано: $F_1 = 5 \text{ кН}$, $F_2 = 8 \text{ кН}$ ($F_2 = 6 \text{ кН}$)	$N_{\max} = 8 \text{ кН}$	1
		$N_{\max} = 6 \text{ кН}$	2
		$N_{\max} = 5 \text{ кН}$	3
		$N_{\max} = -3 \text{ кН}$	4
2	В условиях предыдущей задачи, построить эпюру, определить максимальное напряжение $\sigma_{\max}$ в поперечном сечении (по абсолютному значению). Дано: $A = 100 \text{ мм}^2$	$\sigma_{\max} = 35 \text{ МПа}$	5
		$\sigma_{\max} = -30 \text{ МПа}$	6
		$\sigma_{\max} = -20 \text{ МПа}$	7
		$\sigma_{\max} = 25 \text{ МПа}$	8
3	 Стержень длиной l удлинился на Δl. Пользуясь законом Гука, определить напряжение σ в поперечном сечении. Дано: $\Delta l = 0,25 \text{ мм}$, $l = 1000 \text{ мм}$ ($l = 1250 \text{ мм}$), материал – сталь, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$	$\sigma = 50 \text{ МПа}$	9
		$\sigma = 60 \text{ МПа}$	10
		$\sigma = 30 \text{ МПа}$	11
		$\sigma = 40 \text{ МПа}$	12
4	В условиях предыдущей задачи определить площадь A поперечного сечения стержня, если $F = 4 \text{ кН}$	$A = 90 \text{ мм}^2$	13
		$A = 80 \text{ мм}^2$	14
		$A = 100 \text{ мм}^2$	15
		$A = 70 \text{ мм}^2$	16
5	Стержень длиной $l = 800 \text{ мм}$ ($l = 1000 \text{ мм}$) удлинился на величину $\Delta l = 0,8 \text{ мм}$. Определить относительное поперечное сужение ϵ' стержня, если коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$	$\epsilon' = 0,03 \%$	17
		$\epsilon' = 0,02 \%$	18
		$\epsilon' = 0,025 \%$	19
		$\epsilon' = 0,015 \%$	20

Карточка 8 к задачам III, IV, V

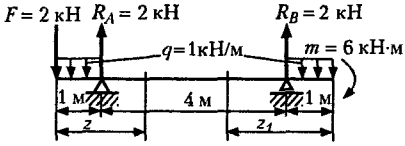
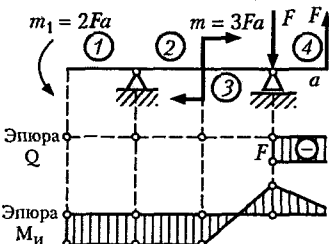
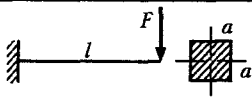
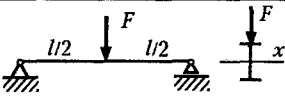
Варианты А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Напряжение σ в поперечном сечении стержня известно. Пользуясь законом Гука, определить относительное удлинение ϵ. Дано: $\sigma = 20$ МПа ($\sigma = 30$ МПа), материал — текстолит, $E = 0,1 \cdot 10^5$ МПа	$\epsilon = 0,3 \%$	1
		$\epsilon = 0,1 \%$	2
		$\epsilon = 0,2 \%$	3
		$\epsilon = 0,4 \%$	4
2	В условиях предыдущей задачи определить абсолютное удлинение Δl стержня, если его длина $l = 1,2$ м	$\Delta l = 3,6$ мм	5
		$\Delta l = 3,2$ мм	6
		$\Delta l = 2,4$ мм	7
		$\Delta l = 2,8$ мм	8
3	 Определить минимальную площадь A поперечного сечения стержня из хрупкого материала, растягиваемого силой $F = 12$ кН, если предел прочности $\sigma_B = 240$ МПа и допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 4$ ($[s] = 3$)	$A = 250$ мм ²	9
		$A = 200$ мм ²	10
		$A = 100$ мм ²	11
		$A = 150$ мм ²	12
4	 Определить допускаемое значение силы $[F]$, растягивающей стержень из пластичного материала, если площадь поперечного сечения $A = 300$ мм², допускаемый коэффициент запаса прочности $[s] = 2$, предел текучести $\sigma_T = 280$ МПа ($\sigma_T = 240$ МПа)	$[F] = 32$ кН	13
		$[F] = 46$ кН	14
		$[F] = 36$ кН	15
		$[F] = 42$ кН	16
5	 Стержень из пластичного материала растягивается силой $F = 32$ кН ($F = 24$ кН). Определить действительный коэффициент запаса прочности s, если площадь поперечного сечения $A = 200$ мм² и предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа	$s = 2$	17
		$s = 1,8$	18
		$s = 1,3$	19
		$s = 1,5$	20

КАРТОЧКИ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 4

Карточка 9 к задачам I, II, III

Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	Определить максимальное напряжение τ_k в поперечном сечении при кручении сплошного вала диаметром $d = 20$ мм, если крутящий момент $M_k = 64$ Н·м ($M_k = 48$ Н·м)	$\tau_k = 50$ МПа	1
		$\tau_k = 30$ МПа	2
		$\tau_k = 20$ МПа	3
		$\tau_k = 40$ МПа	4
2	 Определить поперечную силу Q в сечении при $z_1 = 2$ м ($z_1 = 2$ м)	$Q = -4$ кН	5
		$Q = 0$	6
		$Q = 2$ кН	7
		$Q = -2$ кН	8
3	В условиях предыдущей задачи определить изгибающий момент $M_{из}$ в сечении при $z_1 = 2$ м ($z = 2$ м)	$M_{из} = 2$ кН·м	9
		$M_{из} = 6$ кН·м	10
		$M_{из} = -4$ кН·м	11
		$M_{из} = -2$ кН·м	12
4	 Определить поперечную силу Q в сечении при $z = 3$ м ($z_1 = 3$ м)	$Q = 1$ кН	13
		$Q = 2$ кН	14
		$Q = 0$	15
		$Q = -2$ кН	16
5	В условиях предыдущей задачи определить изгибающий момент $M_{из}$ в сечении при $z_1 = 3$ м ($z = 3$ м)	$M_{из} = -1$ кН·м	17
		$M_{из} = -2$ кН·м	18
		$M_{из} = 0$	19
		$M_{из} = 3$ кН·м	20

Карточка 10 к задачам III, IV, V

Вариант А (Б)			
№ задач	Условия задач	Ответы	№
1	 Определить поперечную силу Q в сечении при $z = 2$ м ($z_1 = 2$ м)	$Q = -1$ кН	1
		$Q = 2$ кН	2
		$Q = 1$ кН	3
		$Q = 0$	4
2	В условиях предыдущей задачи определить изгибающий момент $M_{из}$ в сечении при $z_1 = 1,5$ м ($z = 1,5$ м)	$M_{из} = -6$ кН·м	5
		$M_{из} = 4$ кН·м	6
		$M_{из} = 2$ кН·м	7
		$M_{из} = -3$ кН·м	8
3	 Пользуясь теоремой Журавского, указать, на каком участке ошибка в эпюре изгибающих моментов $M_{из}$	На участке 2	9
		На участке 4	10
		На участке 3	11
		На участке 1	12
4	 Определить размер a квадратного сечения деревянной консольной балки длиной $l = 3$ м ($l = 2$ м), нагруженной силой $F = 4$ кН ($F = 5$ кН), если допускаемое напряжение изгиба $[\sigma_{из}] = 9$ МПа	$a \approx 300$ мм	13
		$a = 150$ мм	14
		$a = 200$ мм	15
		$a = 250$ мм	16
5	 Определить максимальное напряжение у двупорной балки с пролетом $l = 4$ м двутаврового сечения, нагруженной силой $F = 16$ кН при условии $W_x = 200$ см³ ($W_x = 160$ см³)	$\sigma_{из} = 100$ МПа	17
		$\sigma_{из} = 60$ МПа	18
		$\sigma_{из} = 120$ МПа	19
		$\sigma_{из} = 80$ МПа	20

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Часть I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА	
Введение.....	4
Раздел первый. СТАТИКА	
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ	6
1.1. Основные понятия статики.....	6
1.2. Основные аксиомы статики.....	8
1.3. Теорема о равновесии плоской системы трех непараллельных сил.....	12
1.4. Разложение силы на две составляющие.....	13
1.5. Связи и реакции связей. Принцип освобождаемости.....	14
1.6. Распределенные нагрузки.....	18
1.7. Принцип отвердевания.....	18
Глава 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ	19
2.1. Геометрический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил.....	19
2.2. Геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.....	21
2.3. Проекция силы на оси координат.....	23
2.4. Аналитический способ определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил.....	24
2.5. Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил.....	25
Глава 3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ И МОМЕНТ СИЛЫ	27
3.1. Сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону.....	27
3.2. Сложение двух неравных антипараллельных сил.....	27
3.3. Момент силы относительно точки.....	29
Глава 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАР СИЛ	30
4.1. Пара сил и момент пары.....	30
4.2. Основные свойства пары сил.....	31
4.3. Эквивалентные пары.....	32
4.4. Теорема о сложении пар.....	33
4.5. Условие равновесия плоской системы пар.....	35
4.6. Опоры и опорные реакции балок.....	35
Глава 5. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ	37
5.1. Лемма о параллельном переносе силы.....	37
5.2. Приведение плоской системы произвольно расположенных сил к данному центру.....	38
5.3. Свойства главного вектора и главного момента.....	39
5.4. Различные случаи приведения плоской системы произвольно расположенных сил.....	41
5.5. Аналитические условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.....	42
Глава 6. ТРЕНИЕ	46
6.1. Понятие о трении.....	46

6.2. Трение скольжения	47
6.3. Трение на наклонной плоскости	51
6.4. Трение качения	54
6.5. Устойчивость против опрокидывания	56
Глава 7. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ	57
7.1. Пространственная система сходящихся сил	57
7.2. Проекция силы на ось в пространстве	58
7.3. Разложение силы по трем осям координат	59
7.4. Аналитический способ определения равнодействующей пространственной системы сходящихся сил	59
7.5. Аналитические условия равновесия пространственной системы сходящихся сил	60
7.6. Момент силы относительно оси	61
7.7. Аналитические условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил	63
7.8. Теорема о моменте равнодействующей относительно оси (теорема Вариньона)	66
Глава 8. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ	67
8.1. Центр параллельных сил	67
8.2. Определение положения центра тяжести	69
8.3. Методы нахождения центра тяжести	70
8.4. Положение центра тяжести некоторых фигур	72
Раздел второй. КИНЕМАТИКА	
Глава 9. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ	75
9.1. Основные понятия кинематики и некоторые сведения из теории относительности	75
9.2. Некоторые определения теории механизмов и машин	76
9.3. Способы задания движения точки	78
9.4. Скорость точки	80
9.5. Ускорение точки в прямолинейном движении	83
9.6. Ускорение точки в криволинейном движении	84
9.7. Понятие о кривизне кривых линий	85
9.8. Теорема о проекции ускорения на касательную и нормаль	86
9.9. Виды движения точки в зависимости от ускорений	90
9.10. Формулы и графики равномерного движения точки	90
9.11. Формулы и графики равнопеременного движения точки	92
9.12. Теорема о проекции скорости на координатную ось	95
9.13. Теорема о проекции ускорения на координатную ось	97
Глава 10. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА	99
10.1. Поступательное движение	99
10.2. Вращение вокруг неподвижной оси	101
10.3. Различные случаи вращательного движения	105
10.4. Сравнение формул кинематики для поступательного и вращательного движений	109
10.5. Преобразование вращательных движений	109
Глава 11. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ	112
11.1. Понятие о сложном движении точки	112
11.2. Теорема о сложении скоростей	114
Глава 12. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА	115
12.1. Понятие о плоскопараллельном движении	115
12.2. Метод мгновенных центров скоростей	116

12.3. Свойства мгновенного центра скоростей	117
12.4. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное	120
Раздел третий. ДИНАМИКА	
Глава 13. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	124
13.1. Аксиомы динамики	124
13.2. Принцип независимости действия сил. Дифференциальные уравнения движения материальной точки	127
13.3. Движение материальной точки, брошенной под углом к горизонту	131
Глава 14. ОСНОВЫ КИНЕТОСТАТИКИ	135
14.1. Метод кинестатики	135
14.2. Силы инерции в криволинейном движении	137
Глава 15. РАБОТА И МОЩНОСТЬ	141
15.1. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути	141
15.2. Работа переменной силы на криволинейном участке пути	142
15.3. Теорема о работе равнодействующей	143
15.4. Теорема о работе силы тяжести	144
15.5. Работа постоянной силы, приложенной к вращающемуся телу	146
15.6. Мощность	147
15.7. Коэффициент полезного действия	148
Глава 16. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	150
16.1. Теорема об изменении количества движения	150
16.2. Теорема об изменении кинетической энергии	152
16.3. Закон сохранения механической энергии	155
Глава 17. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК	158
17.1. Уравнение поступательного движения твердого тела	158
17.2. Уравнение вращательного движения твердого тела	159
17.3. Кинетическая энергия твердого тела	163
17.4. Сравнение формул динамики для поступательного и вращательного движений твердого тела	165
17.5. Понятие о балансировке вращающихся тел	168
17.6. Некоторые сведения о механизмах	171
17.7. Понятие о промышленных роботах	176
Часть II. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	
Глава 18. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ	178
18.1. Исходные понятия	178
18.2. Основные гипотезы и допущения	180
18.3. Виды нагрузок и основных деформаций	182
18.4. Метод сечений. Напряжение	184
Глава 19. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	188
19.1. Напряжения и продольная деформация при растяжении и сжатии	188
19.2. Закон Гука при растяжении и сжатии	191
19.3. Поперечная деформация при растяжении и сжатии	194
19.4. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали	195
19.5. Потенциальная энергия деформации при растяжении	199
19.6. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии	200
19.7. Растяжение под действием собственного веса	202

19.8. Статически неопределимые задачи	204
19.9. Смятие. Контактные напряжения	207
Глава 20. СДВИГ (СРЕЗ)	209
20.1. Напряжения при сдвиге	209
20.2. Расчеты на прочность при сдвиге	210
20.3. Деформация и закон Гука при сдвиге	212
20.4. Закон парности касательных напряжений	213
20.5. Напряжения в наклонных сечениях при растяжении. Главные напряжения	214
Глава 21. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	217
21.1. Статический момент площади	217
21.2. Полярный момент инерции	219
21.3. Осевой момент инерции	220
21.4. Момент инерции при параллельном переносе осей	221
21.5. Главные оси и главные моменты инерции	222
Глава 22. КРУЧЕНИЕ	225
22.1. Понятие о кручении круглого цилиндра	225
22.2. Эпюры крутящих моментов	226
22.3. Напряжения и деформации при кручении	228
22.4. Расчеты на прочность и жесткость при кручении	231
22.5. Потенциальная энергия деформации при кручении	233
22.6. Расчет цилиндрических винтовых пружин	234
Глава 23. ИЗГИБ	236
23.1. Понятие о чистом изгибе прямого бруса	236
23.2. Изгибающий момент и поперечная сила	238
23.3. Дифференциальные зависимости при изгибе	240
23.4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов	241
23.5. Нормальные напряжения при чистом изгибе	248
23.6. Расчеты на прочность при изгибе	250
23.7. Касательные напряжения при изгибе	255
23.8. Упругая линия балки	261
23.9. Косой изгиб	268
Глава 24. СОЧЕТАНИЕ ОСНОВНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ	270
24.1. Изгиб и растяжение или сжатие	270
24.2. Гипотезы прочности	274
24.3. Изгиб и кручение	277
24.4. Кручение и растяжение или сжатие	281
Глава 25. ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ	281
25.1. Сопротивление усталости материалов	281
25.2. Влияние факторов на предел выносливости	284
25.3. Расчеты на сопротивление усталости	287
25.4. Сопротивление материалов при инерционной и ударной нагрузке	289
Глава 26. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ	293
26.1. Общие сведения	293
26.2. Формулы Эйлера и Ясинского	294
26.3. Расчеты прямолинейных стержней на устойчивость	296
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	298
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	299
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	306

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ
МАТЕРИАЛОВ**

ISBN 978-5-7695-4494-1



**Издательский центр
«Академия»**

www.academia-moscow.ru